MATEMÁTICAS

Eva GARCÍA CABAÑAS

LA MULTIPLICACIÓN EN EDUCACIÓN PRIMARIA

TFG/*GBL* 2015

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Grado en Maestro de Educación Primaria
Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Grado en Maestro en Educación Primaria

Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Trabajo Fin de Grado
Gradu Bukaerako Lana

LA MULTIPLICACIÓN EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Eva GARCÍA CABAÑAS

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y SOCIALES
GIZA ETA GIZARTE ZIENTZIEN FAKULTATEA

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Estudiante / Ikaslea
Eva GARCÍA CABAÑAS

Título / Izenburua
La multiplicación en Educación Primaria

Grado / Gradu
Grado en Maestro en Educación Primaria / Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Centro / Ikastegia
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales / Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea
Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Director-a / Zuzendaria
Inmaculada LIZASOAIN IRISO

Departamento / Saila
Departamento de Matemáticas / Matematika Saila

Curso académico / Ikasturte akademikoa
2014/2015

Semestre / Seihilekoa
Primavera / Udaberrik

Preámbulo

El Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, modificado por el Real Decreto 861/2010, establece en el Capítulo III, dedicado a las enseñanzas oficiales de Grado, que "estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa de un Trabajo Fin de Grado […] El Trabajo Fin de Grado tendrá entre 6 y 30 créditos, deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estar orientado a la evaluación de competencias asociadas al título".

El Grado en Maestro en Educación Primaria por la Universidad Pública de Navarra tiene una extensión de 12 ECTS, según la memoria del título verificada por la ANECA. El título está regido por la *Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria*; con la aplicación, con carácter subsidiario, del reglamento de Trabajos Fin de Grado, aprobado por el Consejo de Gobierno de la Universidad el 12 de marzo de 2013.

Todos los planes de estudios de Maestro en Educación Primaria se estructuran, según la Orden ECI/3857/2007, en tres grandes módulos: uno, *de formación básica*, donde se desarrollan los contenidos socio-psico-pedagógicos; otro, *didáctico y disciplinar*, que recoge los contenidos de las disciplinares y su didáctica; y, por último, *Practicum*, donde se describen las competencias que tendrán que adquirir los estudiantes del Grado en las prácticas escolares. En este último módulo, se enmarca el Trabajo Fin de Grado, que debe reflejar la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas. Finalmente, dado que la Orden ECI/3857/2007 no concreta la distribución de los 240 ECTS necesarios para la obtención del Grado, las universidades tienen la facultad de determinar un número de créditos, estableciendo, en general, asignaturas de carácter optativo.

Así, en cumplimiento de la Orden ECI/3857/2007, es requisito necesario que en el Trabajo Fin de Grado el estudiante demuestre competencias relativas a los módulos de formación básica, didáctico-disciplinar y practicum, exigidas para todos los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria.

En este trabajo, el módulo *de formación básica* ha posibilitado enmarcar la propuesta didáctica en las teorías del aprendizaje constructivista y significativo, reflejando aspectos de estas teorías en la sección 1 y, además, con referencias explícitas a lo largo de toda esta publicación.

El módulo *didáctico y disciplinar* ha permitido analizar la secuenciación del proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos objeto de estudio tanto en los currículos vigentes de Educación Primaria como en los libros de texto, figurando de forma expresa en las secciones 3 y 5 respectivamente. También ha sido fundamental para describir el marco matemático, que se detalla en la sección 2, y en la elaboración de las propuestas didácticas surgidas a partir de la visión de diferentes expertos en la materia, trabajado todo ello en las secciones 4, 6 y 7.

Asimismo, el módulo *practicum* ha servido para establecer como punto de partida para la elaboración de este trabajo la opinión, desde su experiencia, de los docentes de un centro escolar, y para integrar los conocimientos estudiados en los módulos anteriores y poder adaptarlos a la realidad de las aulas.

Resumen

En este trabajo se analizan aspectos relacionados con la memorización de los hechos multiplicativos básicos y el aprendizaje del algoritmo de la multiplicación tales como la secuenciación propuesta para ello en los currículos de Navarra y Singapur, las recomendaciones de autores como Maza (1991) y Parker y Baldridge (2003), y la opinión y crítica de diversos expertos en la materia. Además, se estudia la planificación y temporalización realizada para ello en los libros de texto de 2º y 3º de Educación Primaria pertenecientes a una de las editoriales más utilizadas en los centros escolares españoles.

Para finalizar, se realiza una propuesta didáctica que aporta diferentes estrategias, actividades, materiales y recursos para que estos aprendizajes resulten más sencillos.

Palabras clave: enseñanza de la multiplicación; tablas de multiplicar; algoritmo de la multiplicación; secuencia didáctica; currículo de Singapur.

Abstract

The present work contains an analysis of aspects of the basic multiplication facts memorizing and the multiplication algorithm constructing such as sequencing proposed for it in the curricula of Navarra and Singapore, the recommendations of authors like Maza (1991) and Parker and Baldridge (2003), and the opinion and criticism from various experts in the field. In addition, the planning and temporization done for it in the textbooks of 2nd and 3rd Primary Education belonging to one of the publishers most used in Spanish schools is studied.

Finally, it is made an educational proposal that brings different strategies, activities, materials and resources in order that this learning becomes easier.

Keywords: multiplication teaching; times tables; multiplication algorithm; didactic sequence; Singapore curriculum.

Índice

Introducción	**1**
1. Antecedentes, objetivos y cuestiones	**3**
1.1. Antecedentes	3
1.2. Objetivos	5
1.3. Cuestiones	6
2. Marco matemático	**7**
3. La multiplicación en los currículos de Matemáticas de Navarra y Singapur	**10**
4. El aprendizaje de las tablas de multiplicar en Educación Primaria	**24**
5. Análisis de la secuencia didáctica para el aprendizaje de la multiplicación en la editorial Santillana	**31**
6. Propuesta sobre la enseñanza de las tablas de multiplicar	**40**
7. Propuesta sobre la enseñanza del algoritmo de la multiplicación	**52**
Conclusiones y cuestiones abiertas	**63**
Referencias	**65**
Anexos	**67**
Anexo I	**67**
Anexo II	**68**

INTRODUCCIÓN

El currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra publicado con fecha del 5 de septiembre de 2014 establece para el área de Matemáticas, en el Bloque 2 referido a Números del segundo curso de Primaria y dentro del apartado Operaciones, que uno de los contenidos que los alumnos deben empezar a conocer en este curso es el de la multiplicación como suma de sumandos iguales, además de aprender las tablas de multiplicar. En el apartado Cálculo del mismo bloque, habla de la utilización de los algoritmos estándar de la multiplicación ya en el curso de segundo.

Como profesora del tercer curso de un centro de Primaria en Navarra, me encuentro trabajando con alumnos que han cursado el primer ciclo de Educación Primaria siguiendo el modelo del currículo anterior correspondiente a la LOE, que limitaba el aprendizaje de las tablas en dicho ciclo a las del 2, 5 y 10, por lo que debo encargarme de la enseñanza del resto de las tablas de multiplicar con el fin de emplearlas en el cálculo algorítmico de multiplicaciones y en la resolución de problemas.

El presente Trabajo Fin de Grado pretende analizar las dificultades con las que se encuentran los alumnos a la hora de aprender las tablas de multiplicar, así como proponer diferentes estrategias, actividades y recursos didácticos para que este aprendizaje resulte más sencillo.

1. ANTECEDENTES, OBJETIVOS Y CUESTIONES

1.1. Antecedentes

La teoría del aprendizaje verbal significativo establece los vínculos entre los procesos de aprendizaje y los de instrucción. Los tipos de aprendizajes en el aula se describen desde dos dimensiones diferenciadas: según las relaciones que establece el alumno entre los conocimientos previos que posee y los nuevos conocimientos que debe aprender, puede producirse un aprendizaje repetitivo, mediante el cual se establecen asociaciones arbitrarias entre sus conocimientos previos y la nueva información, y está basado en procedimientos mecánicos como la repetición (citándose como ejemplo el aprendizaje de las tablas de multiplicar a través de canciones o por copia repetida), o un aprendizaje significativo, que se da cuando se relacionan los conocimientos previos con la nueva información y se produce una transformación tanto en el conocimiento anterior como en el que se adquiere; por otra parte, se distingue entre el aprendizaje por recepción, presentado al alumno en su forma final sin que éste elabore o aporte nada a ello, o el aprendizaje por descubrimiento, que se da cuando el alumno debe descubrir o elaborar el contenido que ha de asimilar: un ejemplo de este tipo de aprendizaje sería la inferencia de una fórmula matemática a partir de la resolución de problemas propuestos. Así, puede darse un aprendizaje significativo por recepción, un aprendizaje significativo por descubrimiento, un aprendizaje repetitivo por recepción o un aprendizaje repetitivo por descubrimiento (adaptado de Prados, Reina, del Rey, 2014, 30-31).

Las teorías constructivistas recomiendan sustituir en lo posible el aprendizaje memorístico en Matemáticas por un aprendizaje significativo que asegure la comprensión por parte del alumno de la materia estudiada. Sin embargo, en el caso de las tablas de multiplicar, el aprendizaje memorístico sigue siendo el más extendido en las aulas.

Esta práctica se justifica argumentando que el conocimiento memorístico de algunos resultados matemáticos básicos da fluidez a la hora de realizar tareas matemáticas más complejas, como la aplicación de los algoritmos tradicionales o la resolución de problemas.

Además, existe la creencia generalizada de que el aprendizaje memorístico supone menos dificultades para los alumnos que el aprendizaje comprensivo, lo que no es cierto en todos los casos.

Para comprobarlo y como punto de partida de este trabajo, se aplicó un sencillo cuestionario (Anexo I) a los docentes de los cursos de 4º, 5º y 6º de un colegio de Educación Primaria sobre las dificultades que tienen sus alumnos en Matemáticas como consecuencia directa de un mal aprendizaje memorístico de las tablas de multiplicar.

Las respuestas, recogidas en las tablas y el gráfico que siguen, muestran que el número de alumnos que presentan alguna dificultad de este tipo no es despreciable, por lo que se considera importante dedicar este trabajo a reflexionar sobre este tema.

Tabla 1. Número de alumnos/as que presentan dificultades en la asignatura de Matemáticas como consecuencia directa de errores en el aprendizaje memorístico de las tablas de multiplicar

Curso	Alguna dificultad	Dificultades importantes	Total alumnos/as curso
4º	9	4	67
5º	13	4	60
6º	11	2	67

Tabla 2. Porcentaje de alumnos/as que presentan dificultades en la asignatura de Matemáticas como consecuencia directa de errores en el aprendizaje memorístico de las tablas de multiplicar

Curso	Alguna dificultad	Dificultades importantes
4º	13,43%	5,97%
5º	21,67%	6,67%
6º	16,42%	2,99%

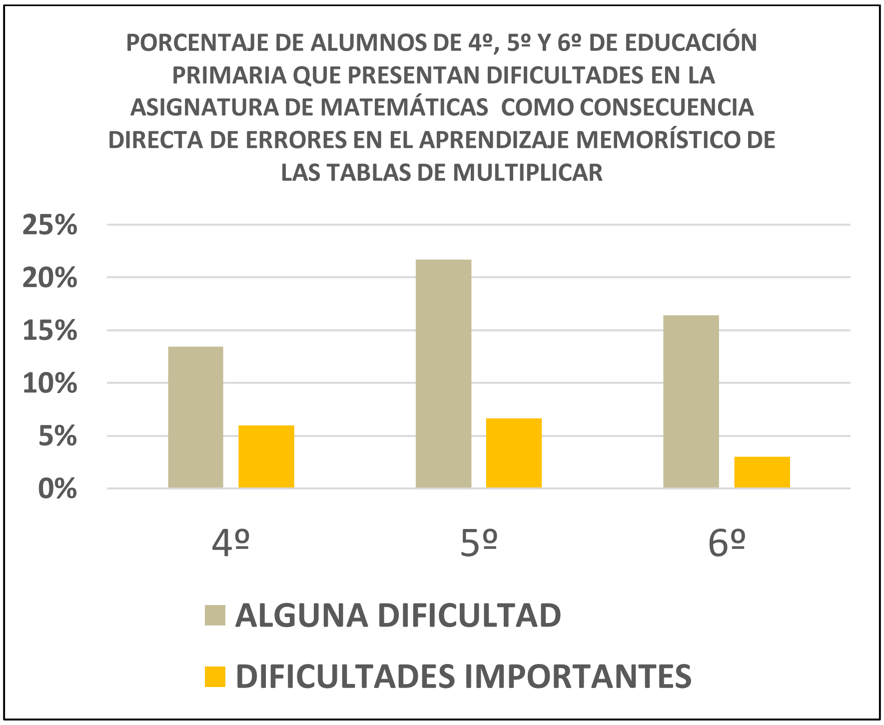


Figura 1. Porcentaje de alumnos de alumnos de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria que presentan dificultades en la asignatura de Matemáticas como consecuencia directa de errores en el aprendizaje memorístico de las tablas de multiplicar

1.2. Objetivos

Teniendo en cuenta lo anterior, se han planteado una serie de objetivos que se resumen a continuación:

1.- Comparar la secuenciación establecida para la enseñanza de la multiplicación en los currículos de Matemáticas desarrollados en la Comunidad Foral de Navarra a partir de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) y de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) entre sí y con el currículo de Singapur.

2.- Analizar las propuestas de algunos expertos en Didáctica de las Matemáticas (T. H. Parker y S. Baldridge por un lado y C. Maza por otro) para el aprendizaje de las tablas de multiplicar en el contexto de la enseñanza de la multiplicación.

3.- Estudiar si la secuencia didáctica para la enseñanza de la multiplicación que siguen los libros de 2º y 3º de Primaria de la editorial Santillana, unos de los más utilizados en los colegios españoles, se adecúa o no a las recomendaciones de los autores citados anteriormente y/o al currículo vigente en Navarra.

4.- Proponer materiales didácticos con los que trabajar en las aulas para conseguir un mejor aprendizaje de los hechos multiplicativos básicos.

1.3. Cuestiones

Se plantean una serie de cuestiones previas a la realización de este trabajo a las que se intentará dar respuesta:

1.- ¿El currículo español de Matemáticas se adecúa a la secuenciación propuesta por los didactas en lo referente al aprendizaje de la multiplicación?

2.- ¿Se ajusta la secuenciación del aprendizaje de la multiplicación de los libros de texto analizados al currículo vigente? ¿Y a las recomendaciones didácticas de los expertos?

2. MARCO MATEMÁTICO

Las tablas de multiplicar recogen de manera sistemática los resultados que proporciona la multiplicación cuando se aplica sobre los primeros números naturales. En este trabajo, llamaremos a estos resultados hechos multiplicativos básicos.

Desde el punto de vista matemático, la multiplicación o producto de números naturales es una operación interna que asigna a cada par ordenado de números (m,n) el número que resulta al sumar m consigo mismo un número n de veces. Este nuevo número se llama producto de m por n, y se denota m x n.

Por esta razón, la multiplicación se utiliza como técnica de recuento cuando queremos contar los elementos que tenemos al juntar n conjuntos disjuntos, cada uno de ellos con un número m de elementos.

Esta situación aparece, por ejemplo, al considerar el producto cartesiano de dos conjuntos. Supongamos que A es un conjunto finito de cardinal m y B otro conjunto finito de cardinal n. El producto cartesiano A x B es el conjunto de todos los pares de la forma (a, b) con a perteneciente a A y b perteneciente a B. Para cada elemento b1 fijo, es claro que hay m elementos del tipo (a, b1). Por tanto, si queremos contar todos los pares del producto cartesiano, tendremos que sumar m + … + m tantas veces como elementos distintos tenga el conjunto B, es decir, n veces.

Cuando hablamos del producto m x n, a los números m y n se les llama factores.

La operación producto verifica las propiedades conmutativa, asociativa y de existencia de elemento neutro, el 1. Además, la multiplicación es distributiva respecto de la suma.

Maza (1991) expone las distintas tipologías de problemas para cuya resolución se utiliza la multiplicación. Comienza por hablar de los problemas que se resuelven por suma reiterada, a los que denomina "de razón", y los que lo hacen por el producto cartesiano, llamados "de combinación", y que, en su opinión, resultan más complicados conceptualmente; mientras que los primeros responden a la concepción de una operación unitaria, los segundos se corresponden con un modelo binario. Además, los problemas de combinación implican la comprensión por parte de los alumnos de una operación nueva, mientras que la resolución de problemas de razón se basa en la reiteración de la operación suma, que ya dominan. Maza incide en la importancia de utilizar representaciones gráficas de tipo matricial para conseguir clarificar el concepto de esta operación en el contexto de problemas de combinación.

Las clases de problemas en los que conviene utilizar la multiplicación se clasificarían, según este autor, en problemas de razón, comparación, combinación y conversión.

Castro (2008) sitúa los aprendizajes de la multiplicación y la división en situaciones de tres tipos:

- Situaciones de proporcionalidad simple, en las que se utiliza la expresión cada o la expresión por (ej. cada niño tiene tres objetos…; ej. se han repartido tres objetos por niño).
- Situaciones de comparación, en las que se utilizan términos como doble o triple.
- Situaciones de producto cartesiano, entre las que se incluyen:
  - Situaciones de combinatoria, es decir, formas posibles de combinar dos conjuntos de objetos.
  - Situaciones de producto de medidas, en las que dos magnitudes se componen para obtener una tercera magnitud.

Castro (2008) efectúa una clasificación de los problemas de multiplicación según las dificultades que considera se dan para su aprendizaje. Parte, en primer lugar, de la dificultad que se encuentra al optar por la operación adecuada para resolver un problema simple. Según este autor, los problemas más sencillos son los problemas de proporcionalidad simple, seguidos por los de comparación y encontrándose las mayores dificultades en los problemas de producto cartesiano.

En referencia a las estrategias de cálculo empleadas por los alumnos para resolver problemas multiplicativos, Castro expone las siguientes:

- Utilizar materiales concretos para modelar la situación planteada.
- Contar en grupos, utilizando los dedos para representarlos.
- Recitar patrones numéricos (recuento a saltos).
- Aplicar hechos numéricos conocidos.
- Aplicar hechos derivados de hechos numéricos conocidos.

Siguiendo a Castro, se relaciona la multiplicación con la división al ser estas operaciones inversas entre sí.

En cuanto a los modelos, se consideran:

- Modelos lineales, es decir, modelos de recuento en los que se utiliza la recta numérica, en la que se efectúan un número de saltos con una longitud determinada.
- Modelos cardinales, entre los que se encuentran la unión repetida de conjuntos con los mismos objetos; matrices o distribuciones de objetos en un esquema rectangular; representaciones mediante producto cartesiano de dos conjuntos; y, por último, conjuntos representados a través de diagramas de flechas.
- Modelos de medida, utilizando para ello regletas de Cuisenaire o balanzas de platillos con brazos de igual longitud.
- Modelos numéricos, en contextos simbólicos, en los que la multiplicación es una suma reiterada.
- Modelos de razón aritmética, de razón o comparación, en términos de "cuántas veces más".
- Modelos funcionales, en los que la multiplicación será una máquina-operador que transforma números-estados en números-estados.

3. LA MULTIPLICACIÓN EN LOS CURRÍCULOS DE MATEMÁTICAS DE NAVARRA Y SINGAPUR

En primer lugar se expone la dificultad que surge ante el establecimiento de un nuevo currículo en Navarra para el curso 2014/2015 a partir de la ley educativa aprobada en 2013, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. Este currículo es de aplicación obligatoria en este curso en los niveles 1º, 3º y 5º de Educación Primaria. Encontramos así que desaparece la estructuración anterior de la etapa por ciclos, y que los alumnos que han cursado en 2013/2014 Primer ciclo o Primer y Segundo ciclo siguiendo la ley educativa anterior (los que cursan en 2014/2015 3º y 5º de Educación Primaria respectivamente), la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación y, en consecuencia, con un currículo diferente, deben asumir como superados contenidos que no estaban programados o incluidos en el currículo cursado con anterioridad. No se proporciona un tiempo de transición para la implantación de la ley en estos niveles.

En lo referente a la enseñanza de la multiplicación, existen diferencias significativas en lo que los alumnos alcanzaban a conocer al finalizar el Primer ciclo LOE y lo que los alumnos alcanzarán cuando finalicen 2º curso LOMCE, y que se detallarán a continuación. No se tiene en cuenta esta circunstancia tampoco en la elaboración del currículo. Además, en 3º de Educación Primaria, los estudiantes han de enfrentarse a una evaluación diagnóstica en la primera semana del mes de mayo, lo que implica que en muchos centros escolares se adelanten contenidos de la asignatura para tener ya impartida la práctica totalidad de ellos con visos de obtener unos mejores resultados en dicha evaluación.

En el desarrollo del Currículo de las Enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra (Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio), publicado en el Boletín Oficial de Navarra número 174, de 5 de septiembre de 2014, a partir de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, los contenidos se estructuran en cinco bloques:

1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas
2. Números
3. Medidas

4. Geometría
5. Estadística y probabilidad

El Bloque 1 es considerado transversal y se toma como referencia o base para el trabajo en el resto de bloques formulados.

Se definen para cada bloque y curso contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, siendo el análisis de estos últimos lo que va a permitir concretar algo más la secuenciación establecida de los contenidos para la etapa, secuenciación que resulta en algunos casos ambigua, confusa y poco detallada.

Se exponen a continuación los siguientes aspectos relativos a la secuenciación de la enseñanza de la multiplicación entre los cursos 1º y 4º de Educación Primaria. Se incluyen entre ellos las referencias a construcción de series numéricas, pues es considerado un requisito previo para la elaboración sistemática de las tablas.

En primer curso de Educación Primaria, los contenidos del Bloque 2: Números, incluyen las siguientes referencias:

Operaciones:

- Iniciación a la multiplicación y al reparto.
- La multiplicación como suma de sumandos iguales y viceversa.

Cálculo:

- Construcción de series ascendentes y descendentes.
- Iniciación en la construcción de las tablas de multiplicar.

Los estándares de aprendizaje evaluables detallan:

Cálculo mental (oral)

- Construye series de forma ascendente y descendente de cadencia 2 y 10.

Cálculo mental (escrito)

- Construye series numéricas sencillas.

No se hace referencia explícita a la multiplicación en los criterios de evaluación, se habla de aplicar estrategias básicas de cálculo mental a la resolución de problemas, así como de identificar y resolver problemas de la vida cotidiana valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados para su resolución.

En segundo curso de Educación Primaria, entre los contenidos del Bloque 2: Números, figuran:

Operaciones:

- Iniciación a la multiplicación como suma de sumandos iguales y para calcular el número de veces. Las tablas de multiplicar.

Cálculo:

- Utilización de los algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación e iniciación a la división por una cifra.
- Automatización de los algoritmos.
- Construcción de series ascendentes y descendentes.
- Construcción y memorización de las tablas de multiplicar.
- Primeras estrategias de cálculo mental.
- Comprobación de resultados mediante estrategias aritméticas.

Los criterios de evaluación incluyen:

- Realizar cálculos básicos con las operaciones de suma, resta, multiplicación e inicio a la división, utilizando diferentes estrategias y procedimientos.

En cuanto a estándares de aprendizaje evaluables, se encuentran:

Cálculo algorítmico:

- Comprende y utiliza las expresiones doble, mitad… en distintos contextos.
- Expresa una multiplicación en forma de sumandos iguales y viceversa.

Cálculo mental (oral):

- Construye series de forma ascendente y descendente de cadencia 2, 3, 5, 10 y 100.
- Conoce de memoria las tablas de multiplicar hasta el 5.

Cálculo mental (escrito):

- Construye series numéricas ascendentes y descendentes.

En tercer curso de Educación Primaria, se cierra el aprendizaje de las tablas de multiplicar y se continúa con el de los algoritmos tal como se observa en el análisis de los contenidos del Bloque 2: Números:

Operaciones:

- Operaciones con números decimales: adición, sustracción y multiplicación.
- Potencia como producto de factores iguales.

Cálculo:

- Automatización de los algoritmos hasta la multiplicación de números decimales.
- Elaboración y uso de estrategias de cálculo mental.

Los criterios de evaluación incluyen, al igual que en el curso anterior:

- Realizar cálculos básicos con las operaciones de suma, resta, multiplicación e inicio a la división, utilizando diferentes estrategias y procedimientos.

Se extrae del apartado de estándares de aprendizaje evaluables:

Cálculo algorítmico:

- Identifica los términos de la multiplicación y la división.
- Comprende y utiliza las expresiones doble, triple, mitad, tercera parte... en distintos contextos.
- Efectúa un determinado número de multiplicaciones (dos de 3 cifras x hasta 2) en un tiempo concreto (6 min.).
- Aplica la propiedad asociativa de la suma y conmutativa de la multiplicación.

Cálculo mental (oral):

- Conoce de memoria las tablas de multiplicar.

Cálculo mental (escrito):

- Construye series numéricas ascendentes y descendentes.
- Multiplica y divide decenas o centenas enteras por un número de una cifra.
- Calcula el resultado de operaciones combinadas de tres números de una cifra: 6 x 5 + 3.
- Estima y comprueba el resultado de sumas, restas y multiplicaciones.

Problemas aritméticos:

- Plantea y resuelve problemas de multiplicación-división de primer nivel (un solo paso o una sola operación).
- Plantea y resuelve problemas sencillos de multiplicación-división de segundo nivel (más de un paso o más de una operación).

Además, en los tres cursos, entre los criterios de evaluación se incluye:

- Conocer, elaborar y utilizar estrategias básicas de cálculo mental y aplicarlas a la resolución de problemas.

En cuarto de Educación Primaria, se describen los siguientes contenidos en el bloque 2:
Operaciones:

- Multiplicación por un número de tres cifras.
- Propiedad conmutativa, asociativa y distributiva.
- Multiplicación y división por la unidad seguida de ceros.

Entre los criterios de evaluación, cabe destacar el que sigue:

- Realizar cálculos numéricos básicos con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división por la unidad seguida de ceros, utilizando diferentes estrategias y procedimientos.

Por último, se expone lo recogido en los estándares de aprendizaje evaluables del cuarto curso referido a la operación de la multiplicación:
Cálculo algorítmico:

- Efectúa un determinado número de multiplicaciones (dos de 3 cifras x hasta 2) en un tiempo concreto (5 min.).
- Aplica la propiedad asociativa de la multiplicación.
- Aplica la regla de prioridad de operaciones con uso de paréntesis.

Cálculo mental (escrito):

- Multiplica y divide decenas o centenas enteras por un número de una cifra.
- Construye series numéricas ascendentes y descendentes.

- Calcula el término que falta en una multiplicación o división del tipo: 30 x ___ = 600.

Un último apunte sirve para destacar algunos contenidos relacionados con la multiplicación que se establecen para los cursos quinto y sexto de Educación Primaria, y que se repiten textualmente en los currículos de ambos cursos:
Cálculo:

- Operaciones con números naturales: adición, sustracción, multiplicación y división.
- La multiplicación como suma de sumandos iguales y viceversa. Las tablas de multiplicar.
- Utilización de los algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división.
- Automatización de los algoritmos.
- Construcción y memorización de las tablas de multiplicar.

Entre los estándares de aprendizaje evaluables, podemos encontrar en quinto curso:
Cálculo algorítmico:

- Efectúa un determinado número de multiplicaciones (dos de 3 cifras por hasta 2) en un tiempo concreto (3 min.).
- Aplica la propiedad distributiva de la multiplicación.

Y nuevamente en sexto curso:
Cálculo algorítmico:

- Efectúa un determinado número de multiplicaciones (dos de hasta 3 cifras) en un tiempo concreto (3 min.).

Resumiendo la información aportada hasta el momento, se puede concluir que el currículo LOMCE desarrollado por el Gobierno de Navarra establece que el aprendizaje de las tablas de multiplicar comienza en primer curso, con una aproximación al concepto de la multiplicación como suma reiterada. En este curso de inicia la construcción de las tablas de multiplicar.
En segundo curso se deben construir y memorizar las tablas hasta el 5, sin dejar claro si esto incluye tablas del 1 al 5 o tablas del 0 al 5, y se define la multiplicación como operación a utilizar para sumar sumandos iguales y para calcular número de veces. Se

menciona también la utilización del algoritmo estándar de la multiplicación, así como la expresión de la multiplicación como suma de sumandos iguales y viceversa.

En tercer curso, se incluye la identificación de los términos de la multiplicación y la utilización de las expresiones doble y triple. En este curso se pide explícitamente que los alumnos sean capaces de efectuar dos multiplicaciones de un número de tres cifras por otro de hasta dos cifras en 6 minutos de tiempo. Además, es en tercer curso de Educación Primaria cuando se habla por primera vez de la aplicación de la propiedad conmutativa de la multiplicación. Se exige por otra parte la memorización las tablas de multiplicar, y también ser capaz de multiplicar decenas o centenas enteras por un número de una cifra. En cuanto a la resolución de problemas, en tercer curso los alumnos plantearán y resolverán problemas sencillos de multiplicación-división de primer y segundo nivel, que requieren más de un paso o más de una operación.

En cuarto curso, con la memorización de las tablas de multiplicar concluida, se incluye el conocimiento de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, pero en cuanto a su aplicación, únicamente se habla de la propiedad asociativa de la multiplicación. Se trabaja la multiplicación y división por la unidad seguida de ceros, y se debe poder efectuar un determinado número de multiplicaciones (dos de un número de tres cifras por otro de hasta dos) en 5 minutos. Se aporta como ejemplo que se pueda calcular el término que falta en una multiplicación o división del tipo: 30 x ___ = 600.

Resulta llamativo que en quinto curso se incluya nuevamente entre los contenidos la multiplicación como suma de sumandos iguales y viceversa, así como las tablas de multiplicar. Vuelve a figurar de manera explícita la construcción y memorización de las tablas de multiplicar entre los contenidos. El número de multiplicaciones que el alumno debe ser capaz de efectuar en un tiempo concreto se repite respecto del curso anterior, dos de un número de tres cifras por otro de hasta dos, aunque en este caso el tiempo se reduce de 5 a 3 minutos. Se evalúa en quinto la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación.

En sexto curso el currículo LOMCE incluye una vez más la construcción y memorización de las tablas y la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación.

La asignación de un tiempo determinado en los estándares de aprendizaje evaluables para efectuar un número concreto de operaciones, que se va reduciendo conforme se promociona de curso, nos lleva a compartir la reflexión de Boaler (2012), que critica la equiparación que se efectúa entre la fluidez en Matemáticas y la adquisición del contenido matemático con la velocidad de ejecución. Para esta autora, los exámenes cronometrados generan en los alumnos ansiedad, reduciendo su rendimiento y produciendo un impacto negativo en su sentir hacia la materia.

De acuerdo con Boaler y Williams (2014), la repetición, memorización y el control de tiempo de resolución resultan perjudiciales en el desarrollo del sentido numérico en los estudiantes, pues interfieren en la búsqueda de estrategias para la construcción de los hechos numéricos multiplicativos. Para ellos, la mejor manera de desarrollar la fluidez numérica es el trabajo con números desde diferentes perspectivas, aplicando propiedades y relaciones, y no la simple memorización de hechos numéricos a ciegas. La importancia dada a estos aspectos provoca la impresión de que el cálculo constituye la esencia de las matemáticas, cuando el eje vertebrador debería ser la resolución de problemas.

El currículo LOE explicita la construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10 en primer ciclo de Educación Primaria apoyándose en número de veces, suma repetida y/o disposición en cuadrículas. El cálculo de dobles a través de estrategias personales se incluye también en este ciclo. El desarrollo curricular resulta más amplio y flexible en cuanto a la inclusión de procedimientos diversos y estrategias personales para el cálculo de multiplicaciones, permitiendo la elección del procedimiento más conveniente para la resolución de problemas y para la realización de cálculos sencillos.

En segundo ciclo, el currículo navarro desarrollado a partir de la LOE incide nuevamente en la utilización de la multiplicación como suma abreviada, en disposiciones rectangulares y problemas combinatorios. Los objetivos de construcción y memorización de las tablas de multiplicar culminan al finalizar este ciclo, es decir, en cuarto curso de Educación Primaria, con lo que resulta mucho menos cerrado que en el desarrollo de la LOMCE. Es también en segundo ciclo cuando se debe ser capaz de utilizar los algoritmos estándar de la multiplicación. Entre los criterios de evaluación, se describe la importancia de la explicación oral de las estrategias utilizadas en el cálculo mental, argumentando que es prioritario este aspecto sobre la rapidez en el cálculo.

No se menciona en este currículo en qué momento se trabajarán las propiedades de la multiplicación, dejándolo de esta manera a criterio de los docentes. Como se puede apreciar, el currículo desarrollado a partir de la LOE destaca por una mayor flexibilidad en la adquisición de los contenidos, tanto en tiempo como en forma. El currículo LOMCE resulta mucho más encasillado, y adelanta los contenidos respecto del currículo anterior. Como se verá en el desarrollo de este trabajo, la secuenciación propuesta por los expertos en el aprendizaje de las Matemáticas, los prerrequisitos y las diferentes representaciones gráficas que llevan a la comprensión de la operación no se reflejan en el currículo vigente, que claramente no está diseñado conforme a las recomendaciones de los didactas de las Matemáticas: sigue más bien una secuenciación tradicional, partiendo de una sola idea de la multiplicación como suma reiterada o número de veces, trabajando las tablas en orden creciente sin tener en cuenta las propiedades multiplicativas y, eso sí, definiendo en mayor medida qué contenidos corresponden exactamente a cada curso de la etapa, pero repitiendo exactamente la misma descripción de algunos de ellos en diferentes cursos, quedando sin especificar el nivel de profundización al que deben ser tratados.

A continuación, se va a efectuar un análisis del currículo de Matemáticas de Singapur en los aspectos referidos a la enseñanza de la multiplicación. Hemos querido realizar este análisis porque nos han llamado poderosamente la atención las informaciones aparecidas en los últimos años en artículos de prensa y revistas especializadas acerca de los excelentes resultados obtenidos por los alumnos del país en las pruebas internacionales TIMSS 2011 de Matemáticas.

Respecto al currículo de Singapur, cabe mencionar en primer lugar que se está elaborando e implementando de manera gradual. En 2013 se implementó en primer curso de Educación Primaria, en 2014 en segundo curso, en 2015 llega a tercer curso (que se corresponde con lo publicado hasta el momento por las administraciones educativas del país), y continuará su aplicación hasta culminar en 2018 en sexto curso de Educación Primaria. Además de esto, destaca que no se establece una modificación sustancial en la temporalización de los contenidos asignados en cada curso con respecto del currículo anterior, de 2007, que seguirá en vigor en los cursos superiores hasta la culminación del currículo en proceso de implantación; más bien supone algún cambio en cuanto a su estructuración, pues incluye además de los contenidos las denominadas experiencias de aprendizaje.

El currículo de Matemáticas de Primaria en Singapur se organiza en tres bloques de Contenidos: Números y Álgebra; Medición y Geometría; y Estadística; además de éstos, se conforma un bloque de Procesos Matemáticos que atraviesa los tres bloques anteriores.

El bloque Números y Álgebra se subdivide en dos apartados, Números naturales y Dinero. El subapartado Números naturales incluye a su vez otra clasificación: 1. Numeración, 2. Suma y resta, 3. Multiplicación y División.

Como se verá a continuación, los contenidos a trabajar en cada curso están perfectamente definidos, secuenciados, delimitados e ilustrados con algunos ejemplos concretos.

Tabla 3. Contenidos y experiencias de aprendizaje del apartado:

Números y Álgebra_Números naturales_Multiplicación y División

en el currículo de Singapur

Curso	Contenidos	Experiencias de aprendizaje
		Los estudiantes deben tener oportunidades para:
1º	Conceptos de multiplicación y división. Uso de x. Multiplicar dentro de 40. Dividir dentro de 20. Resolver problemas de un paso que involucren multiplicación y división con representación pictórica.	Hacer grupos iguales utilizando objetos concretos y contar el número total de objetos en los grupos por suma repetida usando un lenguaje como “2 grupos de 5” y “2 cincos”. Compartir un número determinado de objetos concretos / recortes de imagen y explicar cómo se hace el reparto y si los objetos pueden ser compartidos por igual. Dividir un conjunto de objetos concretos en grupos iguales, y discutir el agrupamiento y compartir el concepto de división.
2º	Tablas de multiplicar del 2, 3, 4, 5 y 10. Uso de ÷. Relación entre multiplicación y división. Multiplicar y dividir dentro de las tablas de multiplicar. Resolver problemas de un paso que involucren multiplicación y división dentro de las tablas de multiplicar. Cálculo mental que involucre multiplicación y división dentro de las tablas de multiplicar del 2, 3, 4, 5 y 10.	Trabajar en grupos para crear historias de multiplicación y división, escribir una ecuación de multiplicación o división para cada historia y explicar el significado del signo igual. Utilizar objetos concretos y representaciones pictóricas para ilustrar los conceptos de multiplicación y división tales como “multiplicar 3 por 5” y “dividir 12 entre 4”. Explorar patrones de números en las tablas de multiplicación del 2, 3, 4, 5 y 10 a través de actividades como colorear tarjetas de 100. Alcanzar el dominio de las operaciones de multiplicación y división mediante: • Uso de tarjetas de hechos numéricos multiplicativos y de división.

		• Juegos, incluyendo aplicaciones y juegos digitales. • Escribir una familia de 4 hechos numéricos básicos dentro de las tablas de multiplicación dado cualquiera de los hechos básicos (por ejemplo, 3x4=12, 4x3=12, 12÷4=3 y 12÷3=4 son una familia de hechos de multiplicación y división). Trabajar en grupos para crear enunciados de problemas (con representación pictórica si es necesario) que impliquen multiplicación y división para que otros grupos los resuelvan. Resolver problemas no rutinarios utilizando heurísticas tales como “representa” y “dibuja un diagrama” y compartir las ideas.
3º	Tablas de multiplicar del 6, 7, 8 y 9. Multiplicar y dividir dentro de las tablas de multiplicar. División con resto. Algoritmos de la multiplicación y de la división (hasta 3 dígitos por 1 dígito). Resolver problemas de 2 pasos que involucren las cuatro operaciones. Cálculo mental que involucre multiplicación y división dentro de las tablas de multiplicar.	Trabajar en grupos para crear historias de multiplicación y división y escribir las ecuaciones de multiplicación o división para cada historia. Utilizar objetos concretos y representaciones pictóricas para ilustrar los conceptos de multiplicación y división tales como “multiplicar 6 por 5” y “dividir 49 entre 7”. Explorar patrones de números en las tablas de multiplicación del 6, 7, 8 y 9 a través de actividades como colorear la tabla de 100. Trabajar en grupos utilizando discos de números para ilustrar los algoritmos estándar para la multiplicación y la división de hasta 3 dígitos por 1 dígito. Dividir un número de objetos concretos en grupos iguales para descubrir que algunas veces hay objetos que quedan sin incluir como resto y escribir la respuesta como cociente y como resto. Alcanzar el dominio de las operaciones de multiplicación y división mediante: • Uso de tarjetas de hechos numéricos multiplicativos y de división. • Juegos, incluyendo aplicaciones y juegos digitales. • Escribir una familia de 4 hechos numéricos básicos dentro de las tablas de multiplicación dado cualquiera de los hechos básicos (por ejemplo, 4x8=32, 8x4=32, 32÷8=4 y 32÷4=8 son una familia de hechos de multiplicación y división). Utilizar el parte-todo y los modelos comparativos para ilustrar los conceptos de multiplicación y división y utilizar los modelos para determinar qué operación (multiplicación o división) utilizar en la resolución de problemas de un paso. Utilizar el modelo comparativo para reforzar el lenguaje de la comparación como por ejemplo “Ali tiene tres veces más dinero que Mary”.

	Trabajar en grupos para crear enunciados de problemas de resolución en dos pasos que impliquen las cuatro operaciones para que otros grupos los resuelvan. Resolver problemas no rutinarios utilizando heurísticas tales como "representa" y "dibuja un diagrama" y compartir las ideas.

En el currículo de Singapur, las operaciones multiplicación y división se incluyen conjuntamente en la definición de la mayoría de contenidos, considerándose ambas operaciones dentro de una misma familia de hechos numéricos y estudiándose al mismo tiempo. Queda perfectamente establecida la secuenciación de las tablas, en qué curso se van a ir adquiriendo y con qué tipología de ejercicios van a ser trabajadas. Las tareas de resolución y de elaboración de problemas en grupos por parte de los estudiantes quedan especificadas por medio de este currículo.

El currículo de Singapur parte de la resolución de problemas como eje vertebrador sobre el que se diseña. Se basa en la idea de currículo en espiral de Bruner, un enfoque desde el que los contenidos se estudian de forma gradual, retomándose periódicamente e incluyendo nuevos conceptos o ideas: en una palabra, avanzando.

Burgués (2000) expone la desazón que sufren muchos maestros ante los cambios curriculares. Los cambios vienen provocados por los avances tecnológicos y, especialmente en primaria, por la necesidad de mejorar la formación conforme a los cambios sociales y culturales que se van produciendo. Burgués explica la idoneidad de la estrategia de la espiralidad en la adquisición de contenidos, aunque según ella, en España no se aplica de manera adecuada, ya que hay que distinguir muy bien entre currículo en espiral, que implica profundizar paulatinamente en un tema, y repetición de un tema de forma periódica, que sí se hace en España, y que no se corresponde en absoluto con el concepto de currículo circular o espiral. Una vez analizado el currículo LOMCE en Navarra, y refiriéndonos al tema del aprendizaje de la multiplicación, podemos afirmar que encontramos una indefinición absoluta acerca del nivel de profundización que se espera en cada uno de los cursos de Educación Primaria. Sin embargo, tanto este nivel como la secuencia de aprendizaje quedan más claras en el currículo de Singapur.

Siguiendo con las aportaciones de Bruner, que se citan en Orton (2003), en Singapur se sigue el enfoque C-P-A, esto es, partir de lo Concreto (etapa "enactiva"), para continuar con lo Pictórico (etapa "icónica") y finalizar con lo Abstracto (etapa "simbólica"). En la práctica, se inicia el aprendizaje con la manipulación de materiales para pasar a lo pictórico, a las representaciones gráficas, y de ahí a los símbolos matemáticos.

Canals afirma en Biniés (2008) que el aprendizaje, para que sea verdadero, debe comenzar por la manipulación de objetos, por la acción, y no debe quedar ajeno a ello el área del cálculo.

Afirma Burgués (2000) que los materiales didácticos manipulativos para la enseñanza de las Matemáticas caen en desuso a partir de segundo ciclo de primaria (desde tercer curso, desde los 8 hasta los 12 años); recuerda los efectos positivos de la utilización de materiales manipulativos en la enseñanza de las Matemáticas, y lamenta la reticencia de su uso por gran parte del profesorado causada por varios motivos, entre los que se encuentran falta de conocimientos, falta de tiempo, falta de nivel de abstracción de las actividades o incluso por la posible consecuencia de la indisciplina en el aula en situaciones de uso de materiales manipulativos.

Otra de las bases del diseño del currículo de Singapur sería el principio de variabilidad de Dienes (citado en Orton, 2003). Según esto, deberían plantearse de manera sistemática suficientes ejemplos para cubrir todas las posibilidades en un aprendizaje, variando gradualmente la dificultad, para priorizar así la toma de decisiones en la resolución de los problemas sobre la enseñanza de un procedimiento concreto. Se parte de la idea de Skemp de que los conceptos se aprenden a partir de ejemplos y contraejemplos, idea que también se describe en Orton (2003).

En esta línea, Goñi (2000) apunta la necesidad de que en la enseñanza de las Matemáticas en España se refuerce el cálculo mental y oral, así como la estimación y aproximación, en detrimento del tiempo que se dedica en las escuelas al cálculo escrito, pues no debe dejar de tenerse en cuenta que los cambios tecnológicos han permitido una automatización del cálculo que ya no tiene marcha atrás; según este profesor e investigador, más del 75% del tiempo de enseñanza de las Matemáticas se dedica a la aplicación mecánica de algoritmos presentados de manera descontextualizada. Apunta a un necesario cambio estructural en los currículos de Matemáticas de la enseñanza obligatoria, centrados en el cálculo y en la aplicación de reglas en detrimento de la modelización de situaciones y el planteamiento de problemas.

Alsina (2000) expone, de acuerdo con los planteamientos de la NCTM, la necesidad de priorizar, entre otros aspectos, la función del maestro de Matemáticas como guía y motivador de los estudiantes, fomentando el trabajo en grupo, tratando temas actuales en sus sesiones, intentando garantizar una comprensión duradera de los contenidos a través de actividades abiertas, del descubrimiento y la búsqueda, del planteamiento de problemas comprensivos, utilizando lenguajes diversos, y considerando los diferentes ritmos de aprendizaje de los alumnos. Considera que hay que ir dejando de lado la apuesta por el trabajo individual, descontextualizado, abstracto, la clase magistral, el tratamiento de temas tradicionales y, sobre todo, la utilización de actividades cerradas y ejercicios rutinarios**.** Tampoco resulta positiva, según su criterio, la aplicación de la memorización instantánea, el aporte de información inacabada, el tratamiento formal de los temas y el ritmo uniforme para todos los alumnos. Aboga por una evaluación de razonamiento, cualitativa y formativa, en lugar de una evaluación de algoritmos, cuantitativa y, conforme Alsina la denomina, "de ignorancias".

Canals, en sus conversaciones con Biniés (2008) critica, por otra parte, la abundancia de contenidos en los currículos españoles, en los que no se profundiza, abogando por un currículo que priorice las capacidades y las competencias y no los contenidos.

Además, de acuerdo con Burgués (2000), es importante encontrar contextos significativos para la enseñanza de las Matemáticas, tarea complicada para muchos profesionales, como también partir de los conocimientos previos del alumnado y utilizar estrategias comunicativas como la discusión de los resultados y de los modos de resolución de un problema de manera colaborativa entre los estudiantes.

Canals, en Biniés (2008), expone también la importancia de la expresión verbal por parte de los alumnos, ya que saber expresar los pensamientos es fundamental en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. La idea de verbalizar los procesos seguidos en los aprendizajes se recoge tanto en el currículo de Singapur como en los currículos españoles.

4. EL APRENDIZAJE DE LAS TABLAS DE MULTIPLICAR EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Como se ha expuesto en la sección anterior, en el currículo LOMCE que marca las enseñanzas de Matemáticas en Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra, el aprendizaje de las tablas de multiplicar aparece en el segundo curso dentro del Bloque 2, dedicado a los Números, dentro de la sección Operaciones, al hablar de la iniciación a la multiplicación. Curiosamente, la construcción y memorización de las tablas de multiplicar vuelve a aparecer al mencionar el algoritmo de la multiplicación dentro de este mismo Bloque 2, pero en una sección distinta denominada Cálculo.

El currículo, por tanto, afirma que los alumnos deben llegar a memorizar los hechos multiplicativos básicos para ser capaces de abordar tareas multiplicativas más complejas, como la multiplicación de números de varias cifras mediante el algoritmo tradicional o la resolución de problemas. Está claro que, si un alumno responde automáticamente 15 cuando se encuentra ante el producto de 3 x 5 en un problema, podrá dedicar su atención a pensar cuestiones de mayor dificultad dentro del problema que esté intentando resolver. Pero esta memorización no está reñida con un aprendizaje comprensivo de los hechos multiplicativos básicos recogidos en las tablas de multiplicar.

Las propuestas didácticas más recientes proponen comenzar comprendiendo el concepto de la multiplicación mediante sus diferentes formas de modelización, seguir con el manejo y comprensión de las propiedades de esta operación y utilizar estas propiedades para el aprendizaje de los hechos multiplicativos básicos.

Parker y Baldridge (2003) señalan que conviene explicar la multiplicación a través de tres modelos. Los describiremos para un ejemplo concreto, el de multiplicar 3 x 5:

1.- Modelo de conjuntos: 3 x 5 se interpreta como “3 grupos de 5 objetos”.

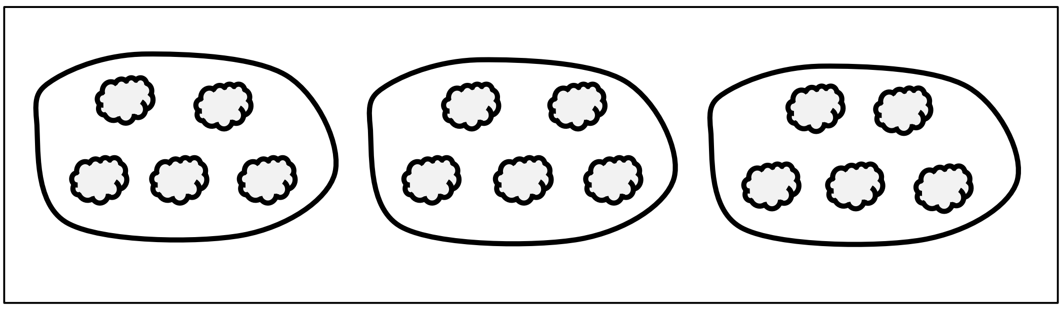


Figura 2. Representación gráfica del modelo de conjuntos

2.- Modelo de medida: 3 x 5 se expone como “3 saltos en la recta numérica, cada uno de ellos de longitud 5” o como un diagrama de barras que muestra tres secciones de longitud 5.

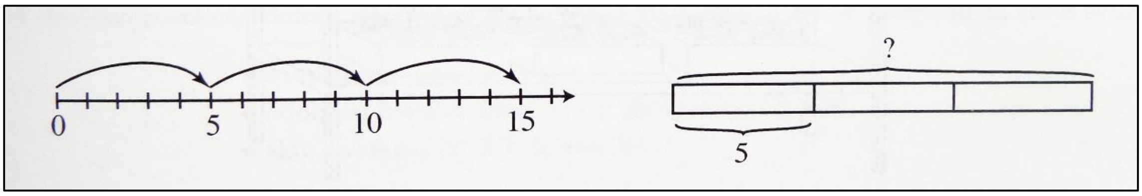


Figura 3. Representación gráfica del modelo de medida (Parker y Baldridge, 2003, 25)

3.- Modelo de matriz rectangular: 3 x 5 se presenta como 3 filas de 5 objetos.

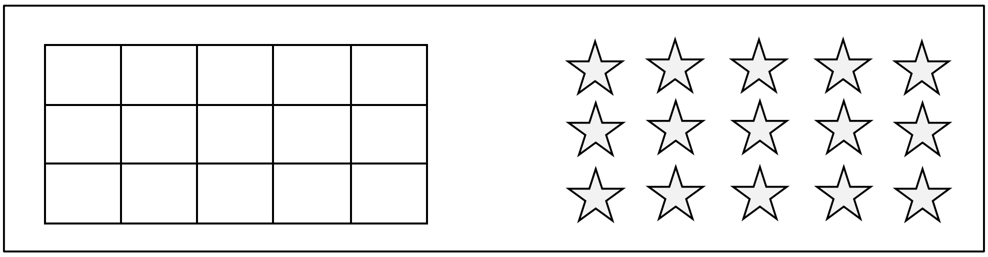


Figura 4. Doble representación gráfica del modelo matricial

El primer modelo que se presenta a los alumnos es el de suma reiterada, puesto que, al conocer ya la operación suma, les resulta más sencillo de entender. Los alumnos elaboran problemas gráficos y verbales, para conseguir reconocer la multiplicación como una operación nueva, diferente de la suma.

Al representar algunos de estos problemas, conviene utilizar los otros dos modelos de representación para que los alumnos se familiaricen con ellos cuanto antes. Esto les permitirá comprender la multiplicación con mayor profundidad y les ayudará a reconocer los diferentes problemas donde conviene utilizar la multiplicación.

Para explicar las propiedades de la multiplicación a los alumnos, utilizaremos estos modelos. Por ejemplo, para explicar la propiedad del elemento neutro de la multiplicación, decimos que 1 x 5 es 1 grupo de 5 objetos y que, por tanto, tiene exactamente 5 objetos. No les hablaremos de elemento neutro. Diremos sencillamente que multiplicar por 1 no altera el número dado.

La propiedad conmutativa se explica a través de las matrices rectangulares. El ejemplo anteriormente expuesto, se puede describir como 3 grupos (en horizontal) de 5 o como 5 grupos (en vertical) de 3.

Es fácil ver así que 3 x 5 = 5 x 3, mientras que, si utilizamos otro modelo de la multiplicación, esta propiedad no resulta inmediata.

La propiedad asociativa se ilustra a través de problemas de recuento como el siguiente: *Si tenemos tres estanterías, cada una de ellas con cinco baldas y dos macetas en cada balda. ¿Cuántas macetas tenemos en total?*

- Si contamos en primer lugar las baldas, 3 x 5, y después el número total de macetas, el resultado será (3 x 5) x 2, mientras que si pensamos primero en las macetas que hay en cada estantería, 5 x 2, entre las tres estanterías, tendremos 3 x (5 x 2) macetas.

Combinando apropiadamente estas dos propiedades, vemos que:

3 x (2 x 5)=3 x (5 x 2) = (3 x 5) x 2 = (5 x 3) x 2 = 5 x (3 x 2) = 5 x (2 x 3) =

(5 x 2) x 3 = (2 x 5) x 3 = 2 x (5 x 3) = 2 x (3 x 5) = (2 x 3) x 5 = (3 x 2) x 5

Es decir, una serie de números naturales puede multiplicarse en cualquier orden, obteniéndose siempre el mismo resultado.

Si enseñamos esto a los estudiantes, no tendrán que preocuparse de aplicar la propiedad conmutativa o la asociativa, nombres que ni siquiera tenemos que darles, sino que podrán combinar los factores en la forma que haga más sencillo el cálculo en cada caso.

Por último, la propiedad distributiva resulta muy sencilla de entender utilizando el modelo de las matrices rectangulares:

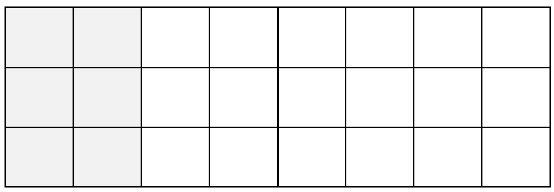


Figura 5. Representación gráfica de la propiedad distributiva en el modelo matricial

3 x (2 + 6) = (3 x 2) + (3 x 6)

(número de casillas = número de casillas sombreadas + número de casillas sin sombrear)

Una vez comprendida, la propiedad distributiva resulta muy útil como estrategia para el cálculo mental. Además, todas estas propiedades les facilitarán el aprendizaje de las tablas de multiplicar, que tan costoso resulta a algunos alumnos.

En la misma línea, Maza (1991) expone las estrategias necesarias para el aprendizaje de los hechos multiplicativos básicos, descartando la memorización en orden creciente de las tablas que se ha venido realizando tradicionalmente. En su lugar, parte de la construcción de las multiplicaciones como sumas reiteradas, pero reduciendo el número de resultados mediante la aplicación de las propiedades multiplicativas. Las estrategias que propone pasan por utilizar el cálculo de doble y mitad, uno más, dos más, uno menos y aplicación de la propiedad conmutativa. Destaca también que el aprendizaje de una información desordenada complica la memorización de dicha información: si bien es fundamental aplicar estrategias variadas en el aprendizaje de las tablas, se deben repasar de manera frecuente y organizada. Así, considera que el orden más apropiado en el estudio de los hechos multiplicativos sería:

1. Tabla del 1
2. Tabla del 2
3. Tabla del 3
4. Tabla del 4
5. Tabla del 10
6. Tabla del 9
7. Tabla del 5
8. Tabla del 6
9. Tabla del 8
10. Tabla del 7
11. Tabla del 0

En esta secuencia, los hechos multiplicativos que resultan algo más complicados de memorizar son 6 x 7, 6 x 8, 6 x 9, 7 x 8, 7 x 9 y 8 x 9.

Maza plantea actividades diversas para la construcción de las tablas, como la criba de Eratóstenes, resolviendo al mismo tiempo actividades que muestren la necesidad de conocer las multiplicaciones básicas de forma aleatoria.

Por su parte, Parker y Baldridge (2003) proponen una secuencia de aprendizaje de los hechos multiplicativos que describimos a continuación. Antes de comenzar, sugieren que los alumnos hayan trabajado los siguientes aspectos:

- Conteo hasta 100
- Suma de dobles desde 1 + 1 hasta 10 + 10
- Secuencias de números (conteo en saltos) de 2 en 2, de 3 en 3, de 5 en 5 y de 10 en 10

- Valor de posición en cuanto a unidades y decenas

Si dominan estos prerrequisitos, el aprendizaje de los primeros hechos sobre multiplicación les resultará muy sencillo:

ETAPA 1:

Multiplicación por 2: Dobles ya conocidos por la suma
Multiplicación por 3 y 4: Conteo en saltos
Multiplicación por 0 y 1: Sencillo, una vez explicado
Multiplicación por 10: 3 x 10 = 3 decenas = 30

La práctica en la resolución de problemas lleva a los estudiantes a darse cuenta de que la memorización de hechos multiplicativos básicos (como por ejemplo 3 x 4 = 12) evita mucho esfuerzo, y que, además, hechos ya aprendidos pueden utilizarse para construir otros nuevos (4 x 4 es 4 más que 3 x 4).

Las propiedades de la suma permiten dar el paso de estos hechos básicos a otros algo menos sencillos:

ETAPA 2:

Multiplicación por 5: Mediante conteo en saltos
Multiplicaciones de la etapa 1 en el orden inverso (utilizando la propiedad conmutativa)
Multiplicación por 9: 6 x 9 = 6 decenas - 6 (utilizando la propiedad distributiva)
Multiplicaciones del tipo 3 x 40, 20 x 30: Valor posicional

En esta segunda etapa, los alumnos serán capaces de realizar, incluso mentalmente, operaciones del tipo:

7 x 9 = 7 x (10 - 1) = (7 x 10) - (7 x 1)

7 x 11 = 7 x (10 + 1) = (7 x 10) + (7 x 1)

7 x 14 = 7 x (10 + 4) = (7 x 10) + (7 x 4) = 70 + 28 = 98

7 x 20 = 7 x (2 x 10) = (7 x 2) x 10 = 14 decenas = 140

Este último ejemplo implica el conocimiento del valor posicional, la propiedad "cualquier orden" y la memorización de un hecho multiplicativo básico ya conocido.

Se considera que el tener memorizados los hechos multiplicativos básicos es esencial para la comprensión del concepto de multiplicación, pues permite a los estudiantes considerar ya trivial la multiplicación de números de un dígito, liberando así la memoria a corto plazo para permitir trasladar su atención a la estructura del problema a resolver.

Si no se han memorizado estas multiplicaciones, se sigue considerando la multiplicación de números de un dígito como un procedimiento que requiere tiempo y atención, ocupando así la memoria a corto plazo, y repercutiendo a su vez en dificultades conceptuales en la resolución de problemas con más de un paso. Además, el tener memorizadas las multiplicaciones aporta confianza, la confianza de dominar la multiplicación básica y de estar preparado para resolver problemas más complicados.

La tercera etapa es bastante breve y finaliza al cumplir con el objetivo de que todos los estudiantes deban haber memorizado todas las multiplicaciones hasta 9 x 9.

En las etapas anteriores, se ha reducido ya considerablemente el esfuerzo requerido para aprender los 121 hechos multiplicativos desde 0 x 0 hasta 10 x 10. La propiedad conmutativa reduce el número casi hasta a la mitad, a 66. La multiplicación por 0, 1 y 10 es sencilla, y la multiplicación por 2 ya es sabida por los dobles en la suma. Quedan por tanto únicamente 28 hechos. Una vez superadas con las estrategias ya expuestas las multiplicaciones por 5 y por 9, solo quedarán 15 hechos. Cinco de ellos (3 x 3, 3 x 4, 4 x 4, 3 x 6, 4 x 6) contienen números pequeños y se aprenden normalmente rápido, con lo que quedan 10 hechos multiplicativos que aprender, que se enseñan en tres pasos.

ETAPA 3:

Cuadrados 6 x 6, 7 x 7, 8 x 8, 9 x 9
6 x 7, 7 x 8, 8 x 9 Aplicando la propiedad distributiva: 6 x 7 = (6 x 6) + 6 = 36 + 6 = 42
Resto: ¡Memorizados!

ETAPA 1
ETAPA 2
ETAPA 3

0x0	**0x1**	**0x2**	**0x3**	**0x4**	**0x5**	**0x6**	**0x7**	**0x8**	**0x9**	**0x10**
1x0	**1x1**	**1x2**	**1x3**	**1x4**	**1x5**	**1x6**	**1x7**	**1x8**	**1x9**	**1x10**
2x0	**2x1**	**2x2**	**2x3**	**2x4**	**2x5**	**2x6**	**2x7**	**2x8**	**2x9**	**2x10**
3x0	**3x1**	**3x2**	**3x3**	**3x4**	**3x5**	**3x6**	**3x7**	**3x8**	**3x9**	**3x10**
4x0	**4x1**	**4x2**	**4x3**	**4x4**	**4x5**	**4x6**	**4x7**	**4x8**	**4x9**	**4x10**
5x0	**5x1**	**5x2**	**5x3**	**5x4**	**5x5**	**5x6**	**5x7**	**5x8**	**5x9**	**5x10**
6x0	**6x1**	**6x2**	**6x3**	**6x4**	**6x5**	**6x6**	**6x7**	**6x8**	**6x9**	**6x10**
7x0	**7x1**	**7x2**	**7x3**	**7x4**	**7x5**	**7x6**	**7x7**	**7x8**	**7x9**	**7x10**
8x0	**8x1**	**8x2**	**8x3**	**8x4**	**8x5**	**8x6**	**8x7**	**8x8**	**8x9**	**8x10**
9x0	**9x1**	**9x2**	**9x3**	**9x4**	**9x5**	**9x6**	**9x7**	**9x8**	**9x9**	**9x10**
10x0	**10x1**	**10x2**	**10x3**	**10x4**	**10x5**	**10x6**	**10x7**	**10x8**	**10x9**	**10x10**

Figura 6. Presentación de la secuenciación en tres etapas de los hechos multiplicativos básicos de acuerdo con la propuesta de Parker y Baldridge (2003)

Por último, los autores remarcan que el aprendizaje de la multiplicación se realiza a través de la resolución de cientos y cientos de problemas, equilibrando una mezcla de problemas a resolver mediante cálculo mental, planteamientos de situaciones y hojas de trabajo con una sucesión de multiplicaciones y problemas.

5. ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN EN LA EDITORIAL SANTILLANA

Dado que, en la mayoría de las aulas de Educación Primaria, se sigue un libro de texto para la enseñanza de las Matemáticas, nos parece importante analizar la secuencia didáctica que sigue alguna de las editoriales más extendidas a la hora de tratar la multiplicación de números naturales.

Los libros de texto para el alumno de la Editorial Santillana de Matemáticas, dentro del proyecto "Los Caminos del Saber", reparten los contenidos de cada curso de Primaria en 15 unidades didácticas.

En el libro de segundo curso, en la unidad 7, se presenta por primera vez la multiplicación como suma reiterada. Se propone como punto de partida, utilizando simplemente imágenes, y con la disposición de los objetos representados ya organizada, la expresión de algunos hechos multiplicativos básicos dispuestos de manera aleatoria, explicando también la forma correcta de leer estas operaciones.

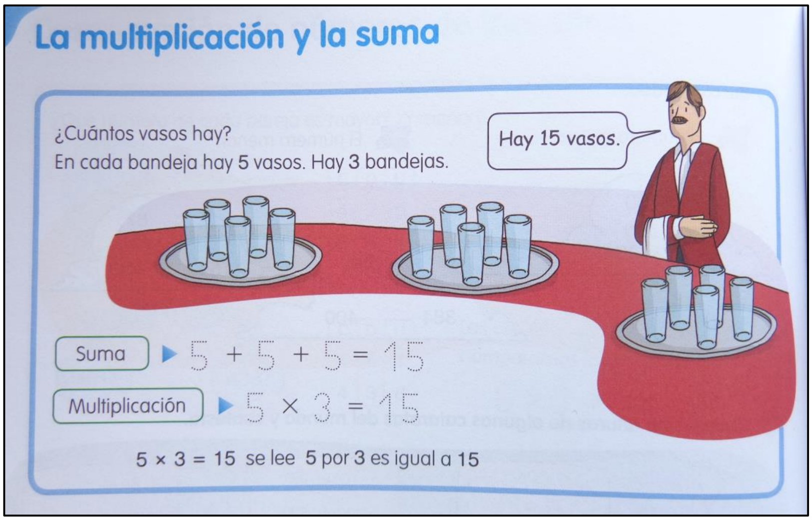


Figura 7. Presentación del concepto de multiplicación en segundo curso (Almodóvar y García, 2011, 92)

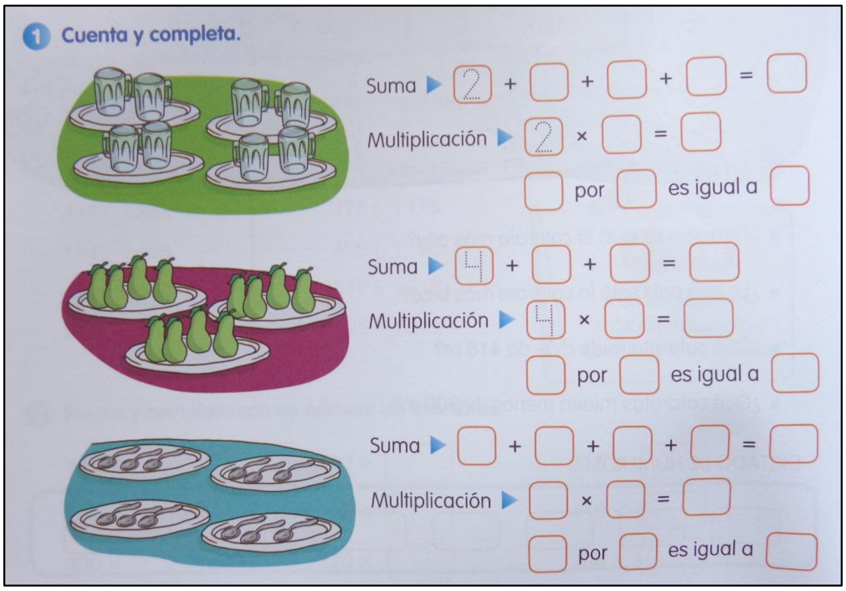


Figura 8. Ejercicio para expresar y leer la operación de la multiplicación (Almodóvar y García, 2011, 92)

En la unidad 8 se construyen las tablas del 2 y del 5. La secuencia continúa en la unidad 9 con la construcción de la tabla del 3 y se afirma textualmente "Al multiplicar dos números el orden no importa", sin explicar cómo se llega a dicha afirmación.

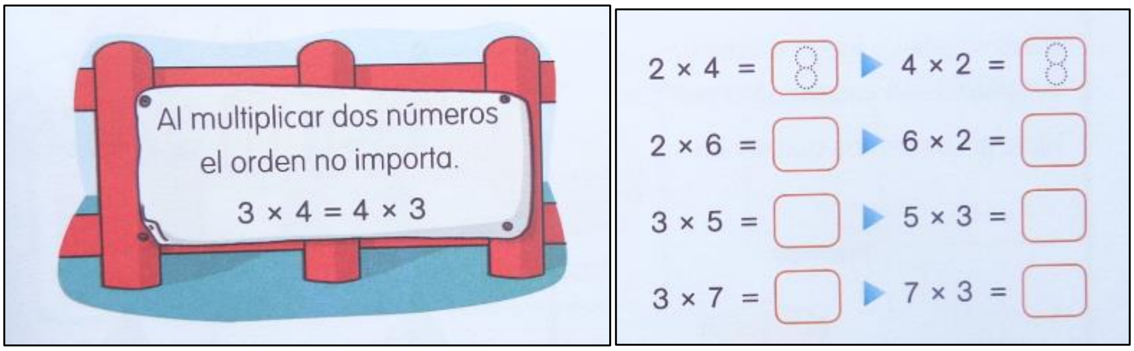
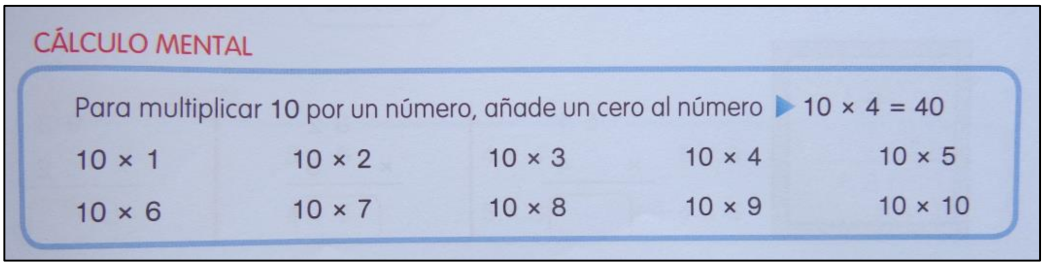


Figura 9. Presentación de la operación conmutativa y ejercicio de aplicación (Almodóvar y García, 2011, 117)

En la unidad 10, aparecen la tabla del 4 y el algoritmo de la multiplicación sin llevada, junto a un pequeño apartado de Cálculo mental en el que se describe el procedimiento de añadir un cero para multiplicar un número por 10, sin hacer ninguna referencia al valor posicional.



CÁLCULO MENTAL

Para multiplicar 10 por un número, añade un cero al número ▶ 10 × 4 = 40

10 × 1	10 × 2	10 × 3	10 × 4	10 × 5
10 × 6	10 × 7	10 × 8	10 × 9	10 × 10

Figura 10. Presentación de la multiplicación de un número de una cifra por 10 y ejercicio de aplicación (Almodóvar y García, 2011, 131)

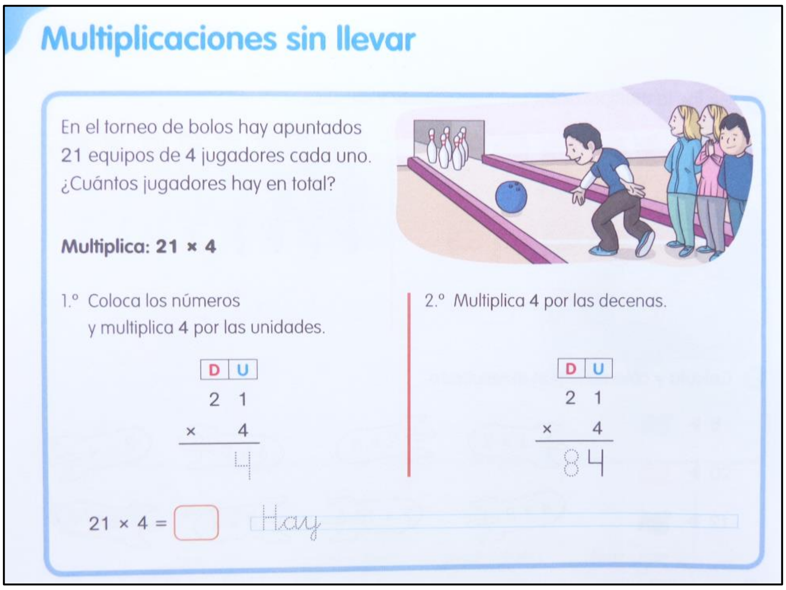


Figura 11. Presentación del algoritmo del algoritmo de la multiplicación sin llevada (Almodóvar y García, 2011, 132)

Las tablas del 6, 7, 8 y 9 se trabajan en las unidades 11, 12, 13 y 14 respectivamente.
No hay ninguna mención al modelo de la multiplicación como reiteración de saltos en la recta numérica, ni al modelo de matrices rectangulares. Sólo se plantea el modelo de conjuntos iguales y la construcción de las tablas mediante suma reiterada.

No se exponen las tablas de manera ordenada, sino que se van construyendo multiplicaciones en orden aleatorio para cada tabla, y en algunos casos no se incluyen todos los hechos multiplicativos básicos. A pesar de que los apartados se titulan La tabla del 2, La tabla del 5, etc., dichas tablas no quedan expuestas como tales en las unidades correspondientes. La relación completa de las tablas aparece únicamente en un anexo al final del libro de texto.

En la unidad 13 se inicia el conocimiento de la división, del reparto en partes iguales, se expone cuál es el símbolo gráfico para esta operación y cómo se lee.

En la unidad 14 hay un apartado dedicado a doble y mitad. Se explica directamente que, para calcular el doble de un número, se multiplica este número por 2 y, para calcular su mitad, se divide entre 2.

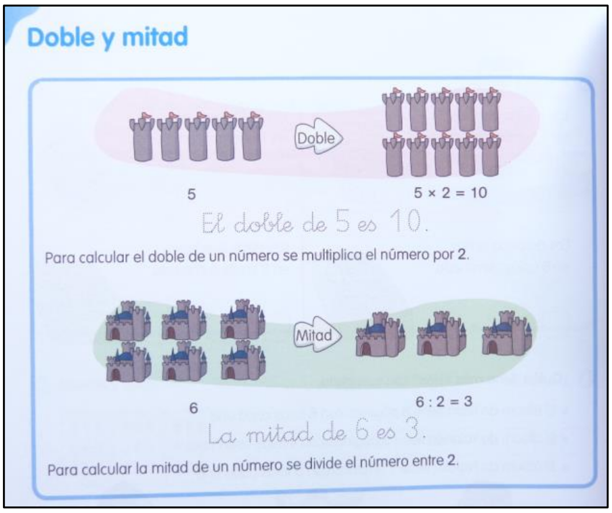


Figura 12. Presentación de los conceptos doble y mitad

(Almodóvar y García, 2011, 186)

Así, en 2º de Educación Primaria se introducen todas las tablas, 110 hechos multiplicativos, desde 1 x 0 hasta 10 x 10, partiendo de un mismo modelo para todas ellas.

En 3º de Educación Primaria se repasan, en las cinco primeras unidades didácticas, las tablas estudiadas en 2º curso. Concretamente, en la unidad 1, se exponen las tablas del 2 y del 3; en la unidad 2, las del 4 y del 5; en la unidad 3, las tablas del 6 y del 7; la del 8 en la unidad 4 y, por último, la tabla del 9 en la unidad 5. En el primer trimestre no se trabajan problemas de multiplicación, ni tampoco se recuerda el significado de este concepto.

Es en el segundo trimestre cuando se dedican cuatro unidades didácticas a la multiplicación y la división.

En la unidad 6 se recuerda, a través de ejemplos gráficos, que la multiplicación es una expresión de la suma de sumandos iguales y se da nombre a los términos de la multiplicación (factores y producto). Se formula nuevamente el hecho de que no importa el orden de los factores para la obtención del resultado; además, se trabajan las series numéricas necesarias para construir las tablas.

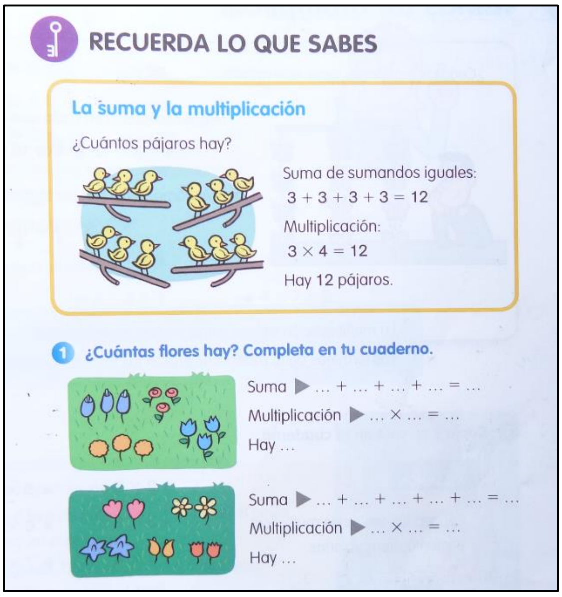


Figura 13. Repaso inicial del concepto de multiplicación en tercer curso (Almodóvar, García y Pérez, 2012, 81)

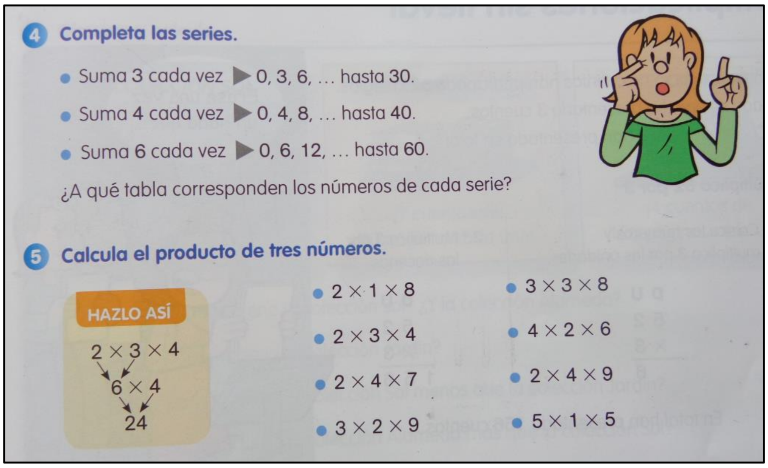


Figura 14. Presentación de la construcción de las tablas de multiplicar a partir de la elaboración de series numéricas y explicación y ejercitación del producto de tres números (Almodóvar et al., 2012, 83)

Por primera vez, se pide que se calcule el producto de tres números de un dígito comenzando por multiplicar los dos primeros (en ese orden) y multiplicando el resultado por el tercero. Se plantean algunos problemas y se ejercita el cálculo mental al multiplicar un número de una cifra por 10, 100 y 1000. Se recuerda el algoritmo de la multiplicación sin llevada y se repasa cómo se halla el doble de un número, introduciendo al mismo tiempo el triple. Se ejercita nuevamente el cálculo mental al multiplicar un número de una cifra por decenas, centenas y millares.

La única imagen que se presenta de la multiplicación como matriz es un pequeño ejercicio en el que se solicita explicar de manera oral cómo se calcularía el producto resultante.

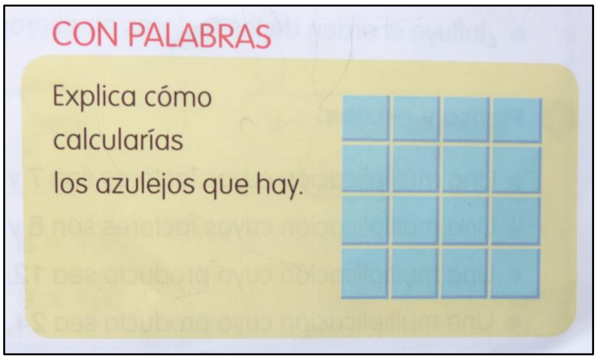


Figura 15. Imagen de la presentación de la multiplicación con disposición matricial (Almodóvar et al., 2012, 81)

En la unidad 7, tras repasar el producto de tres números planteado de manera ordenada como en la unidad anterior (el 1º por el 2º, y ese producto por el 3º), se propone un "truco" para multiplicar tres números de una cifra: primero se multiplican los dos cuyo producto es una decena y posteriormente se multiplica esa decena por el otro número. No hay más opciones ni ejemplos en los que no exista esta circunstancia, es decir, en los que no se pueda lograr diez como resultado del producto de dos de los números ofrecidos.

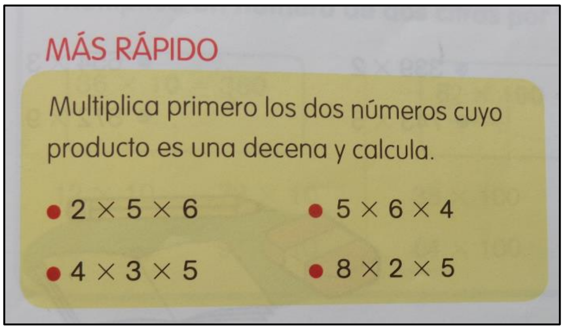


Figura 16. Ejercitación de la multiplicación entre tres números, siendo el producto de dos de ellos una decena (Almodóvar et al., 2012, 93)

En esta misma unidad, se expone directamente el algoritmo de la multiplicación con llevada y se ejercita el cálculo mental al multiplicar un número de dos cifras por 10, 100 y 1000. Finaliza la unidad con la estimación de productos (aproximando el número a la decena, centena o millar correspondiente) y la realización de problemas que impliquen dos operaciones, siendo una de ellas la multiplicación.

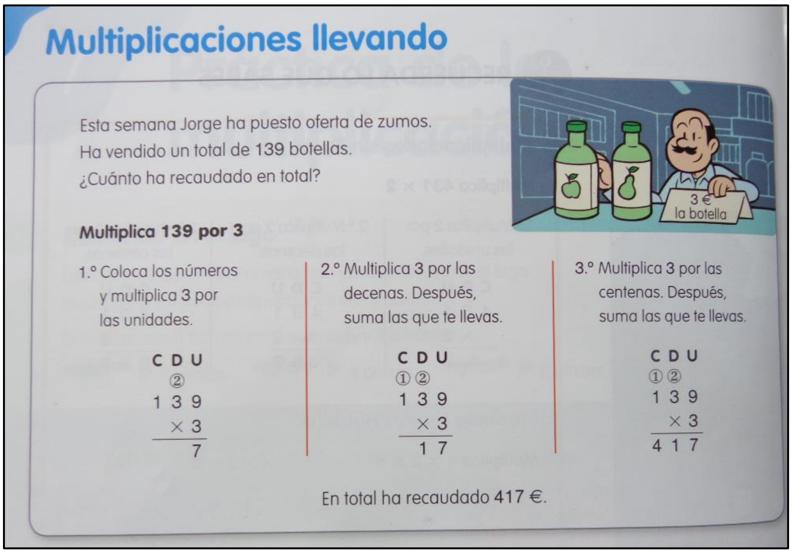


Figura 17. Presentación del algoritmo de la multiplicación con llevada en tercer curso (Almodóvar et al., 2012, 94)

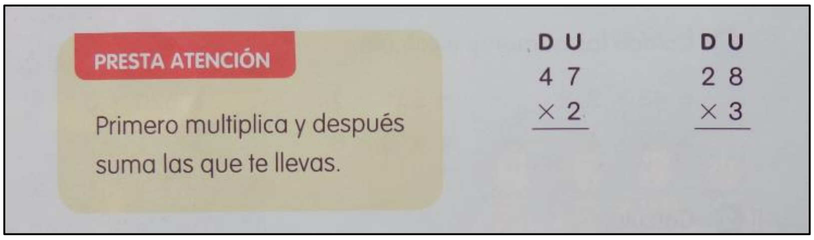


Figura 18. Ejercitación del algoritmo de la multiplicación con llevada (Almodóvar et al., 2012, 94)

En la unidad 8 se repasa el reparto en partes iguales ya presentado en el curso anterior, se muestra el algoritmo, se define la operación de la división y se nombran sus términos. Se trabaja en esta unidad y en la siguiente la prueba de la división, la división exacta y entera, los conceptos de mitad, tercio y cuarto y la resolución de problemas de división.

En nuestra opinión, la secuencia didáctica para la enseñanza de la multiplicación seguida por esta editorial descansa fuertemente en el aprendizaje memorístico tanto de las tablas de multiplicar como de la sucesión de pasos que constituyen el algoritmo tradicional.

Aunque en tercer curso se construyen las tablas de multiplicar mediante series numéricas, no se recurre a las propiedades de la multiplicación para su construcción ni aprendizaje. Además, en el momento de presentar las series numéricas siguiendo esta editorial, ya se han aprendido y memorizado las tablas del 1 al 10.

Por otro lado, los modelos en los que se apoya la comprensión del concepto de multiplicación son demasiado homogéneos, todos ellos del tipo "grupos con igual número de objetos" y las propiedades de la multiplicación se enseñan sin ningún tipo de justificación.

En resumen, la secuencia didáctica para la enseñanza de la multiplicación seguida por esta editorial está lejos de las descritas en la sección 4 de esta memoria, encaminadas a un aprendizaje significativo de esta operación.

Canals apunta en Biniés (2008) la idea de que, con la existencia de las calculadoras y ordenadores, se deben seguir trabajando las operaciones escritas y aprendiendo los algoritmos, pero que no hay prisa en realizar estos aprendizajes. Destaca la excesiva dependencia de los maestros hacia los libros de texto, destacando la incoherencia que presentan respecto a los criterios de las administraciones educativas. Como se ha visto en el ejemplo analizado, el algoritmo se expone de manera precipitada y sin fundamentación para su comprensión. El cálculo escrito debería reflejar lo que ya se ha descubierto por otras vías. Los algoritmos no deben presentarse como pura mecánica, tal como se observa que se ha realizado en esta editorial.

Los profesores son quienes deben adaptar el currículo, según Goñi (2000), pero se debe partir de una base curricular adecuada junto con un compromiso vehemente para su puesta en práctica, poniendo a disposición de los docentes materiales apropiados. Goñi afirma que, pese al rechazo que provoca en los didactas el seguimiento fiel de los libros de texto, la práctica docente indica que su uso está mayoritariamente extendido, pues son los libros los que ofrecen una continuidad en los planteamientos de la asignatura, y a esto se añade la falta de ayuda desde la administración para llevar a cabo planes alternativos en aquellos docentes o centros educativos que así lo deseen.

Goñi (2000) expone que los factores fundamentales que redundan en la calidad de la enseñanza de las Matemáticas son la política curricular del sistema educativo, la competencia de los profesores de Matemáticas y la calidad de los materiales disponibles y utilizados para impartir estas enseñanzas; son tres factores que deben coordinarse y ser coherentes entre sí. Incide en la importancia de tener unos profesores de Matemáticas formados y comprometidos, y solicita que se aparte la enseñanza mecánica de la construcción de las propuestas curriculares como factores fundamentales para reformar con éxito la enseñanza de las Matemáticas.

Algunas causas que aduce Burgués (2000) del escaso éxito ante las evaluaciones internacionales de la enseñanza matemática en España, serían la falta de conocimientos elementales matemáticos de los docentes de educación primaria, la falta de formación permanente de calidad en este área para los maestros, el tiempo lectivo dedicado a la asignatura y, de forma destacada, la insuficiente información que ofrecen los currículos y la no correspondencia de los libros de texto y materiales utilizados con lo marcado desde la administración educativa.

En otro apartado de su exposición, solicita Burgués que se vigile que los libros de texto sean apropiados al currículo vigente, y de calidad, además de que se publiquen de forma clara y precisa cuáles son los cambios propuestos en cada modificación curricular. Propone también que se faciliten por la vía audiovisual modelos de clases impartidas por buenos docentes de las que tomar ejemplo, tal como se hace en algunos otros países.

6. PROPUESTA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS TABLAS DE MULTIPLICAR

Nuestra propuesta a la hora de enseñar los hechos multiplicativos básicos seguiría los pasos propuestos por Parker y Baldridge (2003) o Maza (1991), en la misma dirección, que hemos detallado en la sección 4, es decir, comenzando por la comprensión del concepto de multiplicación siguiendo diferentes modelos, continuando con los hechos básicos referidos a los números más sencillos y terminando por el asentamiento de las tablas de multiplicar más complicadas. Pero, además, proponemos seguir las recomendaciones de Dienes (1986) a la hora de organizar las actividades en el aula. Este autor explica que el aprendizaje de los conceptos o hechos matemáticos se estructura en seis etapas, para cada una de las cuales proponemos actividades o materiales.

- Primera etapa: Adaptación.

En esta etapa, se permite que el niño interactúe con objetos concretos, los explore y se familiarice con ellos sin un objetivo aparente.
En nuestro caso, dejaremos que exploren los objetos y materiales didácticos que aparecen en las actividades detalladas en la segunda etapa.

- Segunda etapa: Estructuración.

En general, se trata de proponer actividades concretas donde se trabaje un mismo concepto, pero modelizado en tareas distintas, donde no se vea muy claro el objetivo de las mismas.
Nuestras actividades irán encaminadas a que adquieran el concepto de multiplicación, tanto como suma reiterada como en el modelo rectangular.
1.- Marcamos las baldosas del aula con números del 1 al 100. Al pasar de una fila a otra seguimos con la numeración correlativamente, en forma de ese o serpiente.
Proponemos a los niños que pasen de baldosa en baldosa, dando saltos de dos en dos, y les preguntamos:
- Si partimos del punto inicial (anterior a la baldosa 1) ¿hasta qué número llegamos en un salto? ¿y en dos? ¿y en tres saltos?...
Repetimos el juego haciendo ahora que los saltos sean de tres en tres baldosas, y les hacemos las mismas preguntas.
Conviene que apuntemos en la pizarra las respuestas obtenidas en cada caso.

2.- Damos a cada niño 4 azulejos cuadrados de cartulina de igual tamaño y les pedimos que formen en el suelo rectángulos: primero de una sola fila, luego de dos, después de tres... Después de formar cada rectángulo, les preguntamos:

- ¿Cuántos azulejos habéis utilizado?

Apuntaremos en la pizarra las respuestas obtenidas en cada caso.

3.- Trabajamos con la tabla utilizada en la pedagogía Waldorf: los niños tienen que enganchar la cuerda que se encuentra en la tabla, de forma sucesiva, en distintos clavos, dando saltos de dos en dos, de tres en tres, etc., formando así diferentes figuras geométricas. Al realizar cada enganche, deberán verbalizar cuál es el número al que han llegado.

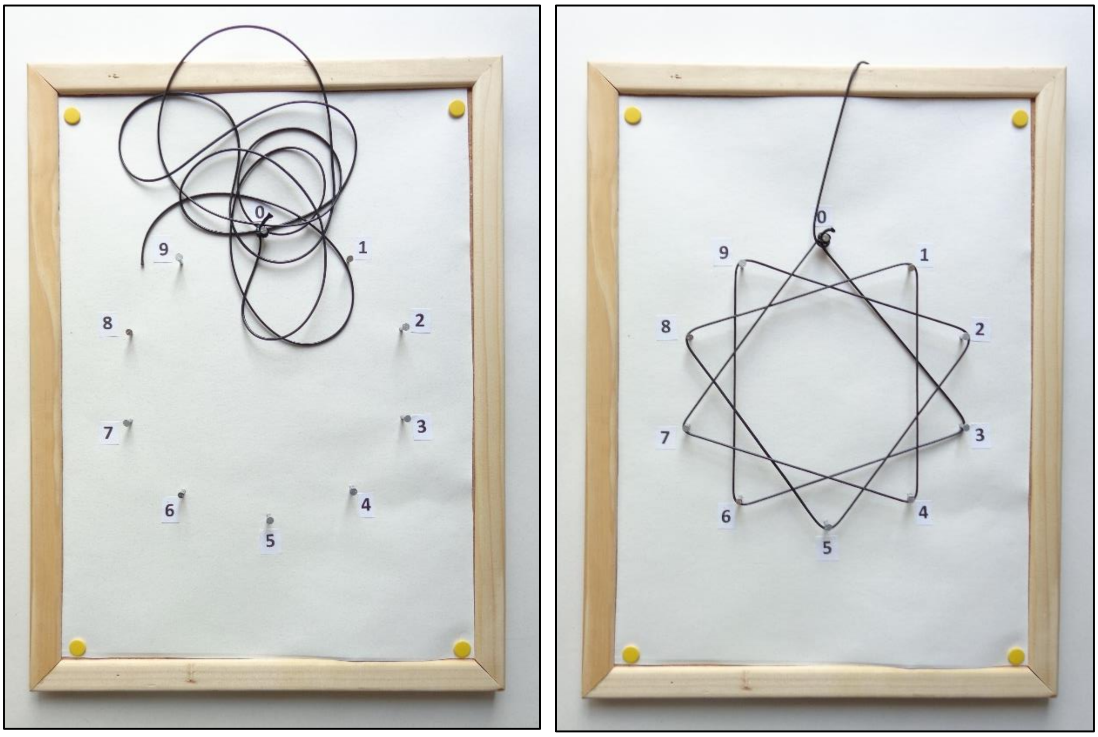


Figura 19. Tablero Waldorf para multiplicar y tabla del 3 en tablero Waldorf

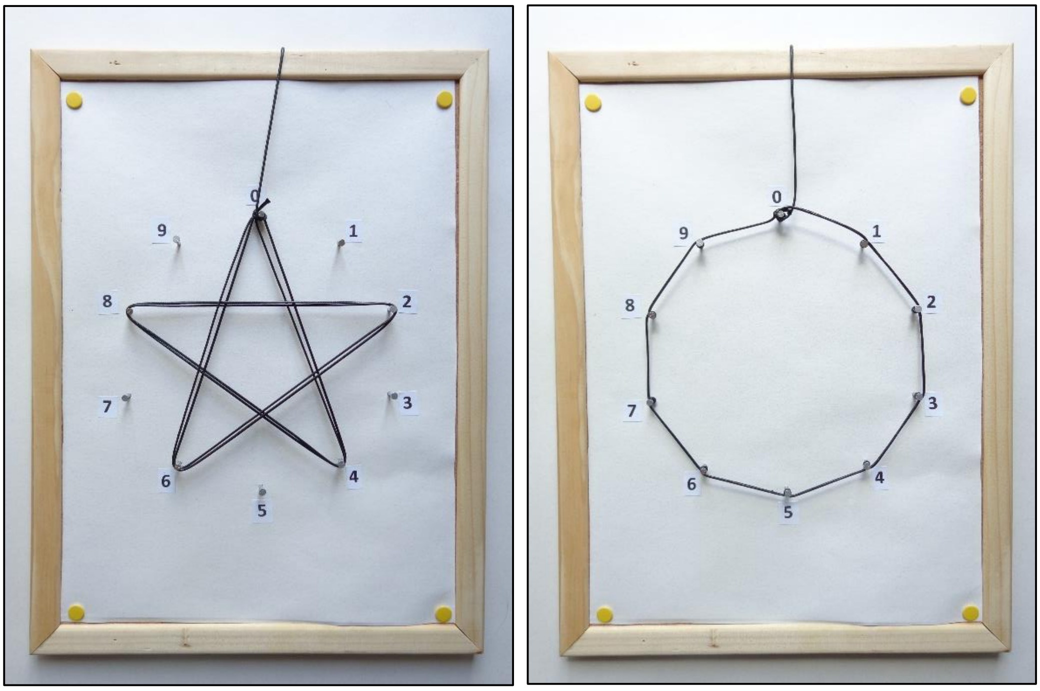


Figura 20. Tablas del 4 y del 9 en tablero Waldorf

Además de la manipulación de la tabla, se propone la representación en papel de las tablas de multiplicar en plantillas circulares siguiendo esta misma metodología para poder cotejar así las tablas, detectar errores, establecer patrones numéricos, y disfrutar del aprendizaje de las Matemáticas. Se presentan en el Anexo II algunas composiciones realizadas en papel para ilustrar esta idea.

4.- Repartimos a cada niño cinco cochecitos iguales. Contamos los que tienen entre dos niños, después entre tres, entre cuatro de ellos,...

Apuntamos en la pizarra los distintos resultados de forma ordenada.

5.- Utilizamos el material denominado *chip model* o fichas de unidad, decena, centena… para recordar el valor posicional de las cifras y hablar de la multiplicación por diez.

- Tercera etapa: Abstracción.

En esta etapa se trata de que los niños entiendan la estructura abstracta común a las distintas actividades que han realizado, prescindiendo de los aspectos irrelevantes, no comunes a las distintas actividades realizadas.

En nuestro caso, reflexionaremos sobre las distintas actividades realizadas en la segunda etapa (excepto quizás en la actividad 3), haciendo ver a los niños que en todos los casos se han hecho sumas reiteradas de números iguales. Conviene hablar ya en este momento de multiplicación e introducir el símbolo x para recoger de una forma más concisa los resultados.

Comprobaremos, además, que los resultados apuntados en la pizarra son los mismos, independientemente de la actividad realizada.

¿Podemos intentar memorizar algunos de estos resultados? ¿Se nos quedan grabados sin hacer mucho esfuerzo?

Utilizando los rectángulos construidos en la actividad 2, se puede hacer reflexionar a los niños sobre la propiedad conmutativa de la multiplicación.

- Cuarta etapa: Representación gráfica o esquemática.

En esta etapa, la idea abstracta que se está trabajando debe ser representada de forma gráfica o esquemática para que pueda ser reconocida visualmente.

La representación gráfica que proponemos en esta etapa es la llamada modelo de barras que aparece en el currículo de Singapur.

El modelo de barras, descrito en la publicación oficial The Singapore Model Method for Learning Mathematics (2009), se comenzó a desarrollar hacia 1980 por un equipo de especialistas del Ministerio de Educación de Singapur, liderados por Dr Kho Tek Hong, tras analizar los pobres resultados obtenidos en Matemáticas por los estudiantes en sus evaluaciones diagnósticas. Este método de resolución de problemas supuso una importante innovación en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas del país, y constituye en la actualidad una de las principales características del currículo de Educación Primaria de Singapur. Basándose en el enfoque CPA de Bruner (Concreto-Pictórico-Abstracto), proporciona a los estudiantes una gran variedad de experiencias de aprendizaje en contextos significativos, en las que utilizarán materiales manipulativos y representaciones pictóricas para ayudarles a comprender conceptos abstractos.

Los alumnos deben representar gráficamente las cantidades conocidas y desconocidas dadas en un problema y la relación entre ellas considerando dos posibles modelos: parte-total y comparación. El modelo se utiliza para introducir las cuatro operaciones aritméticas y también para aprender los conceptos de fracción, ratio y porcentaje. En Educación Secundaria, el modelo se ha aplicado también a la resolución de problemas y se ha integrado para formular ecuaciones algebraicas.

Cada número se representa con una barra de mayor o menor longitud según su valor. Se parte de la manipulación de objetos concretos o imágenes impresas, y, en segundo curso de Primaria, comienza la representación gráfica del problema.

En el modelo parte-total (o parte-parte-total) existe una relación cuantitativa entre las tres cantidades, el total y las dos partes. Para encontrar el total dadas las dos partes, los alumnos suman. Cuando se proporciona el valor del total y de una de las partes, para averiguar el valor de la otra parte, los estudiantes restan.

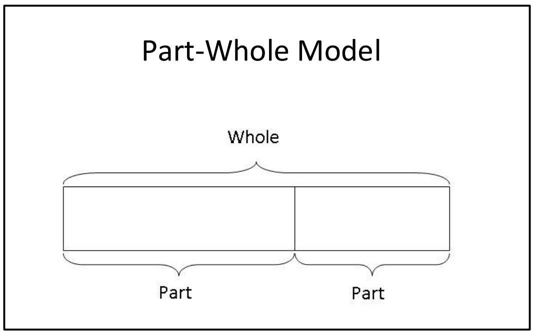


Figura 21. Modelo parte-total para adición y sustracción (Hong et al., 2009, 16)

El modelo comparativo se utiliza para comparar dos cantidades mostrando en cuántas unidades una de ellas es mayor o menor que la otra. Se representa para ello la cantidad mayor, la cantidad menor y la diferencia. La diferencia se obtiene restando la cantidad menor de la menor. Para encontrar la cantidad mayor dada la cantidad menor y la diferencia, los alumnos suman. Cuando se proporciona la cantidad mayor y la diferencia, los estudiantes restan.

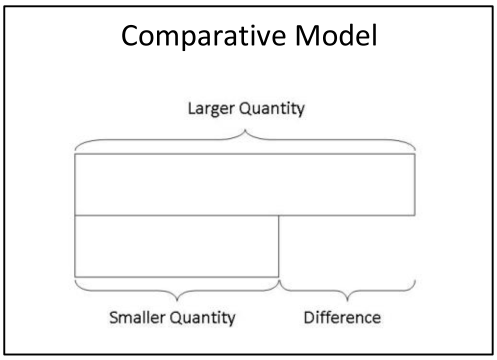


Figura 22. Modelo comparativo para adición y sustracción (Hong et al., 2009, 16)

La aplicación a la multiplicación y división, que implica un total dividido entre un número determinado de partes iguales, resultaría como se expone a continuación:

- En el modelo parte-total, existe una relación cuantitativa entre las tres cantidades, el total, el valor de una parte y el número de partes. Para averiguar el total dada una parte y el número de partes, se multiplica. Si se debe hallar el valor de una parte dado el total y el número de partes, los estudiantes dividen. Y, por último, para calcular el número de partes dado el total y el valor una parte, se divide.
- El modelo comparativo aplicado a la multiplicación expone la relación entre tres cantidades, donde dos de ellas se comparan siendo una de ellas múltiplo de la otra, es decir, número de veces que la contiene. El múltiplo se obtiene dividiendo la cantidad mayor entre la menor; la cantidad mayor, dada la cantidad menor y el múltiplo, se obtiene a través de la multiplicación; la cantidad menor se halla dividiendo la cantidad mayor entre el múltiplo, si son estos últimos los datos conocidos.

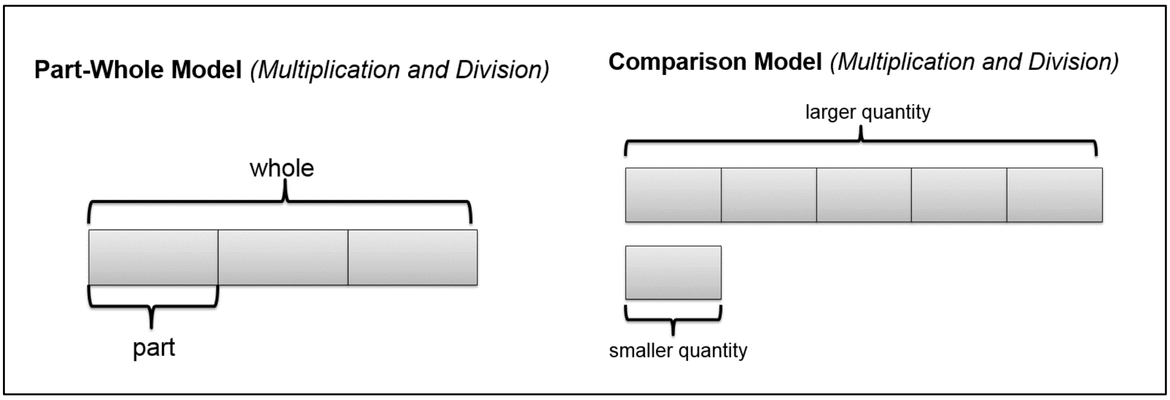


Figura 23. Modelos parte-total y comparativo para multiplicación y división (Hong et al., 2009, 21, 23)

Como actividad, propondríamos problemas de los llamados *de letra* a los niños donde tuvieran que realizar multiplicaciones en distintos contextos y con un grado de dificultad progresivo. Conviene que los números que aparezcan en estos problemas sean menores que 10, de forma que los niños no encuentren dificultades en el cálculo y puedan dedicar su atención a comprender el problema.

Los alumnos tendrían que representar los datos proporcionados por cada problema con barras, según el modelo mencionado, y calcular el resultado mediante sumas reiteradas.

Además de ayudar a la comprensión del concepto de multiplicación, este tipo de problemas creará en los niños la necesidad de memorizar las tablas de multiplicar, puesto que la suma reiterada resulta tediosa y lenta en su aplicación.

Proponemos, además, algunas actividades donde aparece una nueva representación simbólica de los hechos multiplicativos: los llamados *number bonds* o vínculos de números utilizados en el modelo de Singapur.

Los vínculos de números expresan las representaciones mentales de las relaciones que se establecen entre un mínimo de tres números, números que forman una familia de hechos numéricos. Se expresan por medio de círculos o cuadrados conectados mediante líneas, sea en horizontal o en vertical. Los *number bonds* se utilizan tanto para la suma y la resta como para la multiplicación y la división, y son un buen instrumento para familiarizar a los alumnos con los hechos numéricos básicos y poder reconocerlos de manera inmediata. Se aplican también mediante *number bonds* estrategias de descomposición de números en dos o más sumandos para desarrollar el cálculo mental.

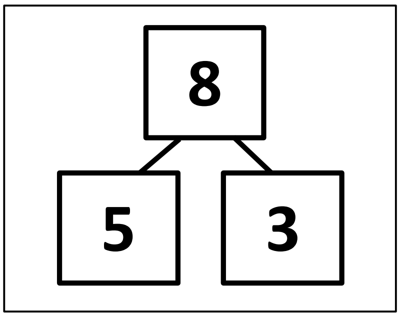


Figura 24. Ejemplo de *number bond* para adición y sustracción

En el ejemplo, conocidos dos de los números, el niño será capaz de reconocer cuál es el número que falta en esta relación de hechos numéricos. Así, la familia de cuatro hechos numéricos resultante a partir de este *number bond* se mostraría como sigue:

$$5 + 3 = 8$$

$$3 + 5 = 8$$

$$8 - 5 = 3$$

$$8 - 3 = 5$$

El objetivo que se persigue es que, cuando se ha aprendido uno de los hechos numéricos que forman parte de la familia, automáticamente se conocen y utilizan también los otros tres, todos ellos a partir de una única imagen mental. Además, se trabaja la relación inversa entre la adición y la sustracción.

En el caso de la multiplicación y división, y, particularmente, para la memorización de tablas de multiplicar, los *number bonds* permiten representar las posibles descomposiciones de números en dos factores.

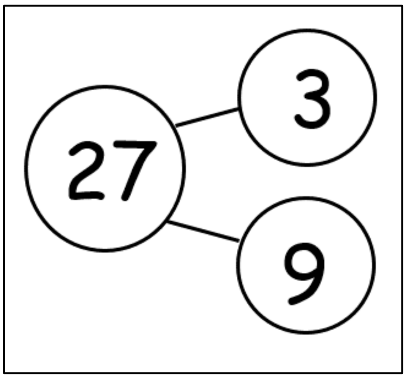


Figura 25. Ejemplo de *number bond* para multiplicación y división

Los cuatro hechos numéricos que se establecen desde la representación de la figura anterior serían:

9 x 3 =27

3 x 9 = 27

27 ÷ 3 = 9

27 ÷ 9 = 3

Queda así también aplicada la conmutatividad de la multiplicación y se define a partir de la construcción de los *number bonds* la división como operación inversa de la multiplicación, esto es, la reversibilidad de ambas operaciones.

a) Se pide a los niños que encuentren todas las posibles descomposiciones multiplicativas de algún número, por ejemplo, el 12, y que las representen mediante *number bonds*, bien sea en el papel o en hojitas de papel autoadhesivo con formas triangulares.

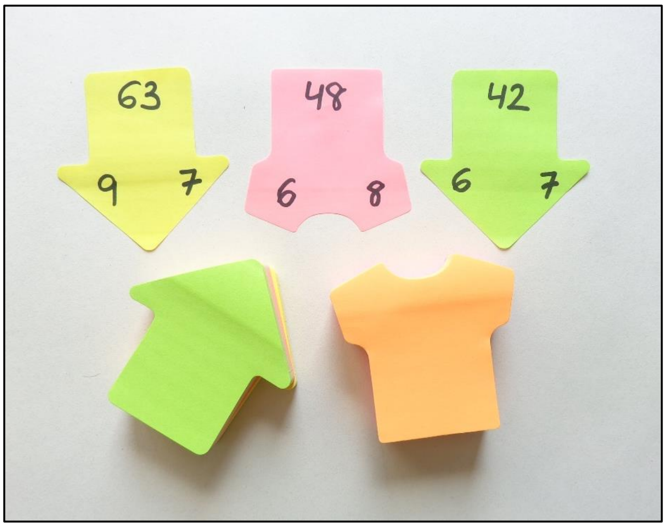


Figura 26. Representación de *number bonds* en hojas autoadhesivas

b) Se proporciona a los alumnos numerosos ejemplos de *number bonds* en los que falte uno de los tres números implicados. En algunos casos, tendrán que hallar el producto de dos números y, en otros, alguno de los factores conocido el resultado.

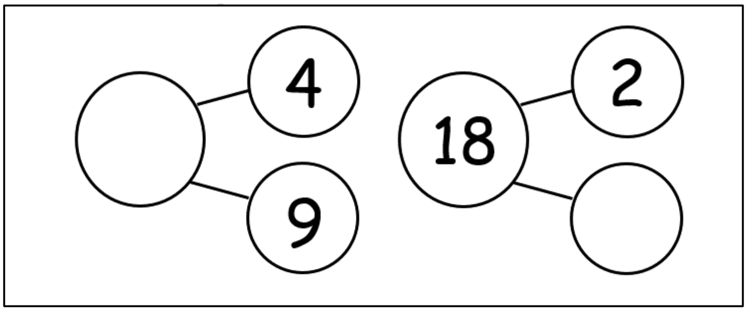


Figura 27. Ejemplos de n*umber bonds* incompletos para multiplicación y división

c) Por parejas: Se reparten *number bonds* completos a cada alumno, pero uno de los niños tapa con sus dedos uno de los datos y el otro niño tiene que adivinar cuál es el dato oculto.

- Quinta etapa: Descripción de las representaciones.

Esta etapa debe servir para explicar a los niños las propiedades de la multiplicación con el lenguaje técnico que se utiliza habitualmente en Matemáticas.
En nuestro caso, podemos aprovechar para hablar de la propiedad asociativa y de la distributiva respecto de la suma utilizando el modelo rectangular como se ha dicho ya en la sección 4.

Conviene realizar también actividades de cálculo mental donde los alumnos puedan comprobar que el conocimiento de las propiedades de la multiplicación les permite realizar los cálculos con mayor facilidad.

- Sexta etapa: Formalización o demostración.

Según Dienes (1986), el niño debe ya de ser capaz de exponer lo aprendido de forma convencional, al mismo tiempo que puede relacionar el concepto abstracto con las actividades realizadas anteriormente.

El trabajo con los *number bonds* resulta de gran utilidad a la hora de expresar los hechos multiplicativos. Por otro lado, necesitamos que sean capaces de repetir los hechos multiplicativos básicos que aparecen en las tablas de multiplicar de forma sistemática.

Una de las actividades que encontramos útiles en este sentido es que cada niño construya un semáforo utilizando tres recipientes, cada uno de ellos con una cartulina en el fondo: una verde, otra naranja y la última, roja.

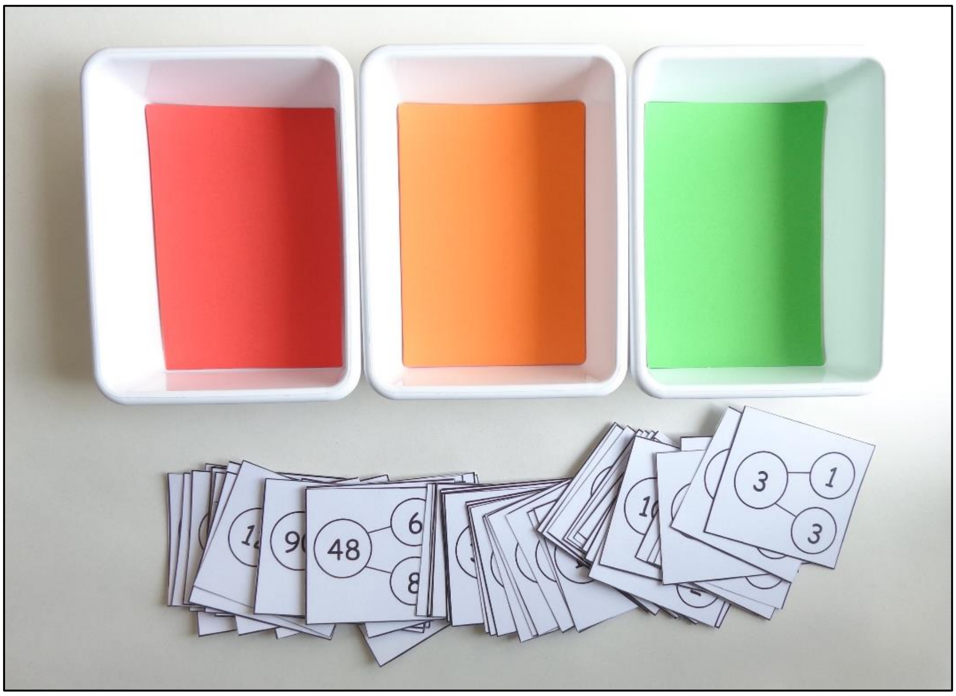


Figura 28. Bandejas de clasificación y tarjetas de *number bonds* para clasificar

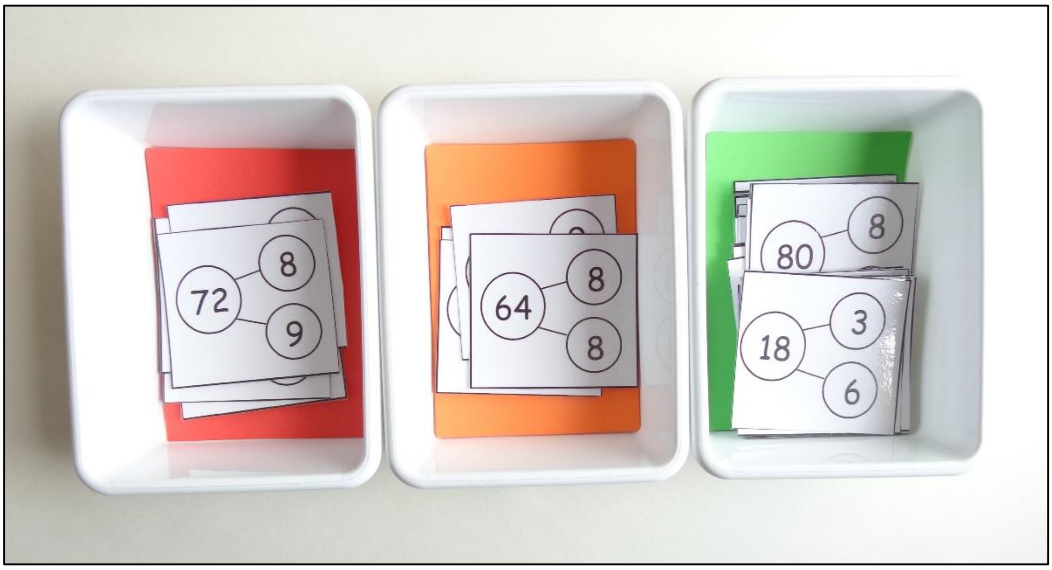


Figura 29. Clasificación de tarjetas de *number bonds* en bandejas

Cada alumno dispondrá de 66 tarjetas, cada una con uno de los *number bonds* multiplicativos formados a partir de las posibles combinaciones de números entre 0 y 10. Se aplica en su construcción la propiedad conmutativa de la multiplicación, excluyendo así los hechos multiplicativos que se hayan expresado en las tarjetas ya elaboradas con anterioridad.

El niño intenta contestar de memoria a cada una de estas multiplicaciones. Si la sabe con total seguridad, coloca su tarjeta en el recipiente con fondo verde. Si todavía tiene dudas, la coloca en el de fondo naranja y si no tiene ni idea de cuál es la respuesta, en el recipiente rojo. Las tarjetas podrán cambiar de recipiente en posteriores repasos.

Colocando en la bandeja de fondo verde los productos obtenidos en las tablas del 0, del 1 y del 10, que se consideran triviales, se reduce desde un primer momento el número de tarjetas a memorizar hasta 36. Una vez aprendida la tabla del 2, conocida por el trabajo previo con los dobles de la suma, el número de tarjetas que restan será de únicamente 28. Y, una vez trabajadas las tablas del 3 y del 5, quedarán solamente 15 tarjetas. Habrá niños que ya tendrán memorizados algunos de los *number bonds* incluidos en estos 15 mencionados, o que habrán adquirido ya estrategias tales como doblar la cantidad resultante de la tabla del 2 para obtener la tabla del 4, y doblar nuevamente este número para obtener la del 8; o bien, aprenderán trabajando sobre los cuadrados de los números y aplicando la propiedad distributiva, tal como se ha expuesto en la etapa 3 de Parker y Baldridge. De esta forma, el niño se dará cuenta de que no son tantos los hechos multiplicativos que no domina todavía, y que son una mayoría (al menos 51 tarjetas) los que ya tiene memorizados, y esta realidad le animará a seguir aprendiéndolos.

Tabla 3. Número de *number bonds* a memorizar

Tabla	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total de tarjetas
Number bonds	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	66
Excluyendo 0, 1, 10	-	-	8	7	6	5	4	3	2	1	-	36
Excluyendo 2	-	-	-	7	6	5	4	3	2	1	-	28
Excluyendo 3, 5	-	-	-	-	5	-	4	3	2	1	-	15

Esta actividad se puede realizar por parejas. Un niño le pregunta a otro y es el primero quien decide en qué recipiente coloca cada tarjeta según la respuesta obtenida.

Además, se podrán construir *number bonds* con factores hasta 12, 15 o incluso 20 para ejercitar el cálculo mental, aplicando las propiedades de la multiplicación y ampliando así la actividad para aquellos alumnos que hayan adquirido con mayor facilidad y rapidez las tablas desde 0 hasta 10.

7. PROPUESTA SOBRE LA ENSEÑANZA DEL ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN

Como se ha expuesto en la sección 5, en el libro de texto de la editorial analizada se presenta directamente la forma tradicional de resolver el algoritmo de la multiplicación sin explicar de dónde deriva su construcción.

Nuestra propuesta se basa nuevamente en las estrategias empleadas en Singapur y en el planteamiento de Maza para la adquisición de este contenido. Siguiendo la exposición de Parker y Baldridge (2003), el algoritmo de la multiplicación surge a partir del cálculo mental.

Tomando un ejemplo concreto, el cálculo de 6 x 14, en primer lugar se calcularía mentalmente el producto de 6 x 10 = 60, añadiendo con posterioridad el resultado del producto de 6 x 4 = 24 para obtener un total de 60 + 24 = 84. Esta operación precisa de la utilización de cuatro ideas matemáticas. En primer lugar, la multiplicación a realizar se descompone en dos multiplicaciones más sencillas. Además, utilizando la propiedad distributiva, 6 x (10 + 4) nos conduce hasta (6 x 10) + (6 x 4). A continuación se acude al concepto de valor posicional, con lo que 6 x 10 = 6 decenas = 60 unidades. En la metodología Singapur, se incide en utilizar alternativamente la denominación de los números por medio de unidades o de decenas (y sucesivamente centenas, unidades de millar, etc.): 60 se traduce en 60 unidades o 6 decenas indistintamente, y los estudiantes están acostumbrados por igual a ambas denominaciones; la suma de 60 unidades y 70 unidades es también la suma de 6 decenas y 7 decenas, de igual modo. Es evidente la constatación de que realizar la multiplicación de 6 x 4 implica la memorización de los hechos multiplicativos de un dígito. Por último, la suma de 60 + 24 requiere el conocimiento del proceso de reagrupamiento utilizado en la suma de varios dígitos. Resumiendo, el algoritmo de la multiplicación surge del conocimiento de:

- Propiedad distributiva
- Valor posicional, multiplicación por 10
- Memorización de los hechos multiplicativos básicos
- Reagrupamiento tal como se utiliza en el algoritmo de la suma

La secuencia curricular del aprendizaje según Parker y Baldridge (2003) se inicia una vez los alumnos son capaces de multiplicar por 1, 2, 3, 4, 5 y 10, y antes de haber memorizado por completo las tablas de multiplicar. El aprendizaje del algoritmo completo se desarrolla en dos etapas, cada una de ellas con una duración aproximada de un año.

Se parte del conocimiento de la propiedad distributiva trabajada a partir de matrices rectangulares, tal como se ha descrito en la sección 4 de este trabajo, y del conocimiento del valor posicional. El valor posicional se fundamenta en la manipulación de fichas de unidades, decenas, centenas (*number chips*)…, el denominado *chip model*, utilizado ampliamente en el currículo de Singapur.

ETAPA 1:

La multiplicación sin llevada quedaría ilustrada a través del siguiente ejemplo:

Multiplicar 32 por 3 = (30 + 2) x 3 = 30 x 3 + 2 x 3 = 90 + 6 = 96

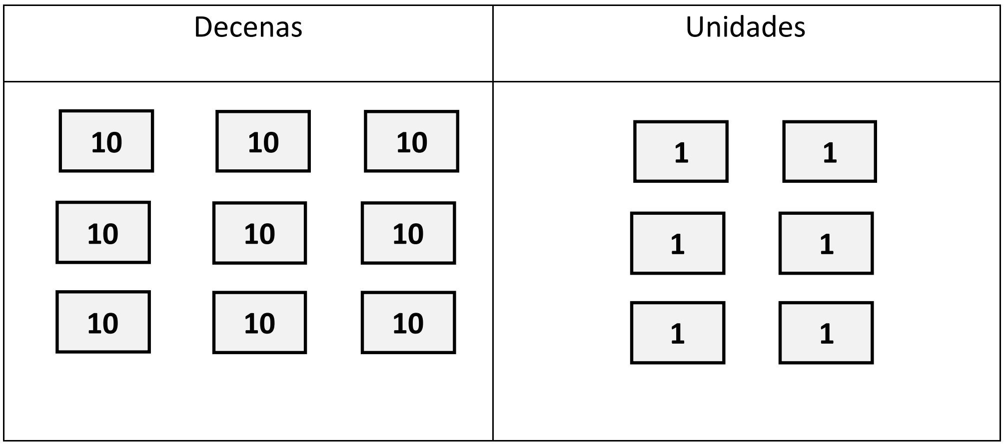


Figura 30. Representación gráfica de la multiplicación sin llevada con *number chips*

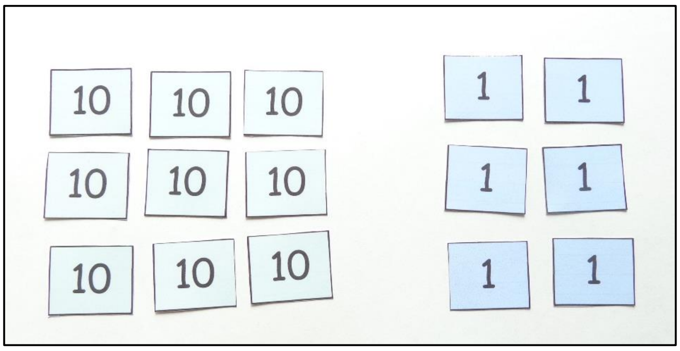


Figura 31. Práctica de la multiplicación sin llevada con *number chips* en cartulina

En la segunda imagen, se muestran *number chips* elaborados en cartulina para trabajar así con material manipulativo.

La multiplicación con llevada requiere, tras aplicar la misma estrategia anterior, el reagrupamiento de las unidades y/o decenas:

Multiplicar 25 x 3 = (20 + 5) x 3 = 20 x 3 + 5 x 3 = 60 + 15 = 60 + 10 + 5 = 70 + 5 = 75

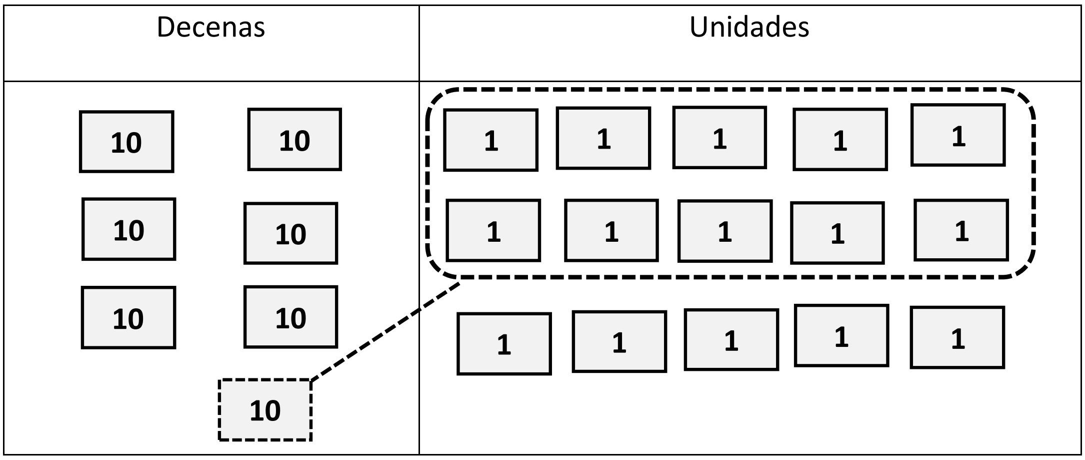


Figura 32. Representación gráfica de la multiplicación con llevada con *number chips*

En esta imagen se muestra cómo, de las 15 unidades obtenidas en la multiplicación, 10 se convierten en 1 decena.

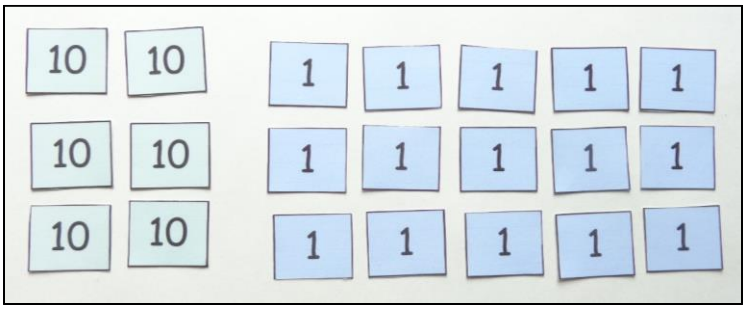


Figura 33. Práctica de la multiplicación con llevada con *number chips* en cartulina

En la misma línea que la seguida por Parker y Baldridge (2003) en esta etapa, Maza (1991) utiliza los bloques multibase para exponer una primera aproximación al algoritmo empleando material manipulativo. Se colocan de igual modo que el descrito con los *number chips* cubos de unidades y barras, se multiplican y se agrupan después los cubos pequeños correspondientes a las unidades para formar barras de 10 unidades e ilustrar así el proceso seguido en las llevadas.

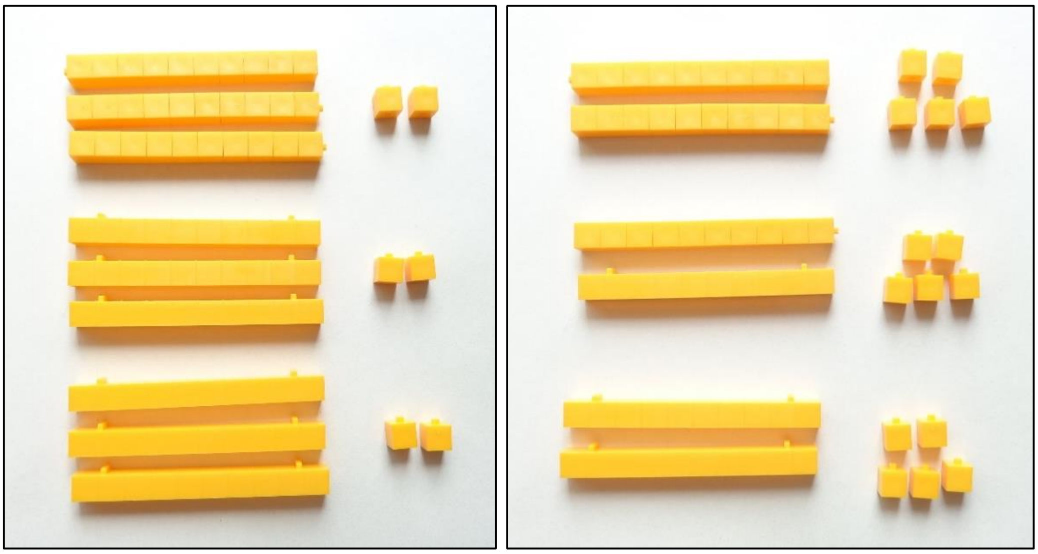


Figura 34. Práctica de la multiplicación sin y con llevada con bloques multibase

En la imagen, se representan las mismas operaciones del ejemplo anterior.

Ambos modelo se recogen asimismo en el manual de Yeap y Edge (2011).

ETAPA 2:

En el proceso seguido en Singapur, se descomponen los números en unidades, decenas, centenas, etc., se dibujan cajas para representar las matrices rectangulares y se completan con el número de rectángulos que representan.

Se presentan a continuación dos ejemplos: en el primero, se calcula el resultado de 26 x 8, y en el segundo se multiplica 237 x 13.

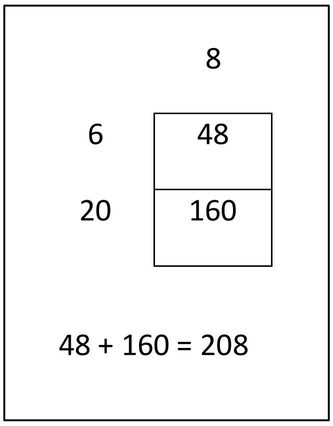


Figura 35. Representación matricial de la multiplicación

	3	10
7	21	70
30	90	300
200	600	2000

21 + 70 + 90 + 300 + 600 + 2000 = 3081

Figura 36. Representación matricial de la multiplicación

Maza hace una primera referencia al algoritmo de multiplicación que se ha trabajado desde el siglo V: la multiplicación en cuadrícula o en celosía. Este algoritmo se obtiene a partir del cálculo de productos parciales y de la suma de llevadas.

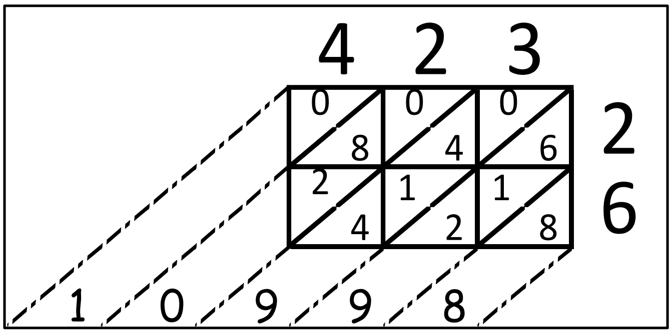


Figura 37. Ejemplo de la multiplicación en celosía

Maza propone una presentación similar a la multiplicación en celosía para trabajar la multiplicación con el multiplicador de varios dígitos. Se ejemplificará a continuación nuevamente la multiplicación 237 x 13.

200	30	7	
2000	300	70	10
600	90	21	3

2000 + 300 + 70 + 600 + 90 + 21 = 3081

Figura 38. Representación matricial de la multiplicación

Desde esta disposición, sólo queda realizar la suma de todos los productos parciales obtenidos, no importa en qué orden.

Las propuestas de Maza (1991) y la de Parker y Baldridge (2003) son coincidentes en su fondo, únicamente queda modificada la disposición de las cuadrículas y de las unidades, decenas y centenas en ella.

A propósito del algoritmo de la multiplicación, Fernández (2005) distingue entre dos clases de algoritmos: el que denomina "sumiso", que llega impuesto para realizar una operación determinada, y es aceptado y aprendido de manera rutinaria sin ser antes comprendido; y el algoritmo "innovador", que llega tras ser entendido y elegido por el alumno. Hay muchas formas de llegar a un resultado, y todas ellas deberían partir del razonamiento lógico y de la creatividad, comprendiendo lo que se está haciendo y apoyándose en propiedades y relaciones matemáticas. Para este autor, el algoritmo sería el punto de llegada, que permitiría reducir el tiempo empleado en realizar el cálculo solicitado, y no el lugar del que se parte para alcanzar un conocimiento. No es lo mismo saber resolver multiplicaciones, es decir, conocer el algoritmo, que saber multiplicar, o lo que es lo mismo, identificar situaciones multiplicativas y saber cómo resolverlas.

Una vez comprendida esta idea y adquirido este procedimiento, se podrá pasar a estudiar el algoritmo estándar tal como aparece en el libro de texto, y tal como se espera resuelvan los alumnos: en la prueba de competencia matemática de la evaluación diagnóstica administrada a los estudiantes de Navarra de 3º de Educación Primaria en el curso 2014/2015, se refleja que desde la administración educativa se espera realicen el algoritmo estándar en ese curso; no obstante, consideramos imprescindible el trabajo previo para su comprensión que se ha señalado anteriormente.

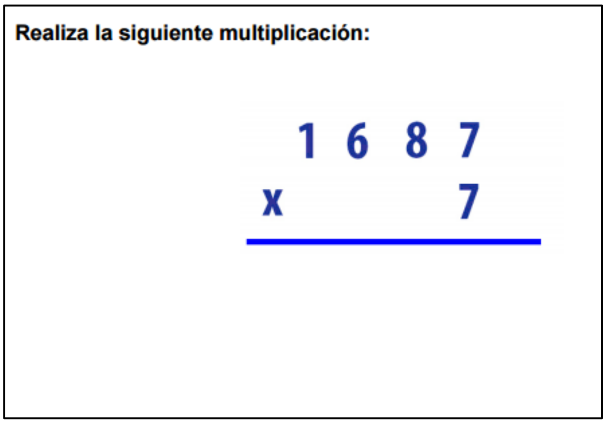


Figura 39. Ejercicio propuesto en la evaluación diagnóstica de 3º de Primaria en Navarra, curso 2014/2015 (http://www.educacion.navarra.es/)

Belmonte (2001) aboga por la utilización de técnicas artesanales para introducir los algoritmos definitivos, ya que ayudan a comprender el significado de los algoritmos estándar.

Nuestra propuesta para el aprendizaje de la multiplicación, además de incluir lo expuesto hasta el momento, pasa por la utilización de las tablillas o varillas de John Napier, también llamado ábaco de Napier, según procedimiento descrito por Jannamorelli (2008), y que derivan de la multiplicación en celosía. Estas varillas se han recreado y elaborado en cartulina para su aplicación y utilización en el aula. Se considera que las varillas pueden resultar un recurso muy útil para la construcción y memorización de tablas, para detectar patrones numéricos que ayuden a fijar los hechos multiplicativos y a visualizar, con el mismo fin, la propiedad distributiva de la multiplicación, así como para motivar a los alumnos con la comprobación del resultado de sus multiplicaciones realizadas en el algoritmo estándar de un número de un dígito por un número de varios dígitos, pues son un instrumento antiguo de cálculo precursor de las máquinas utilizadas en la actualidad.

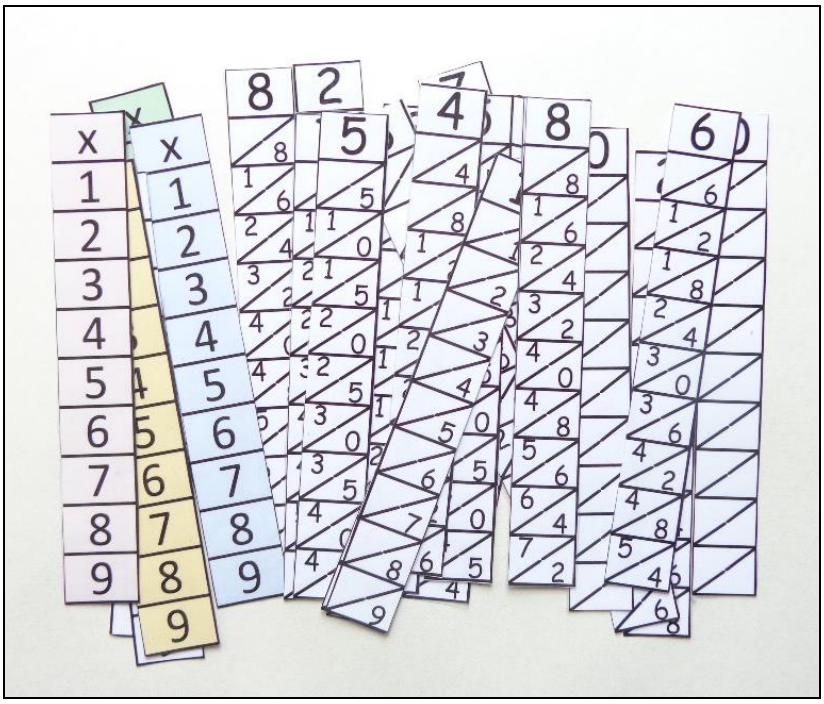


Figura 40. Recreación en cartulina de las varillas de Napier

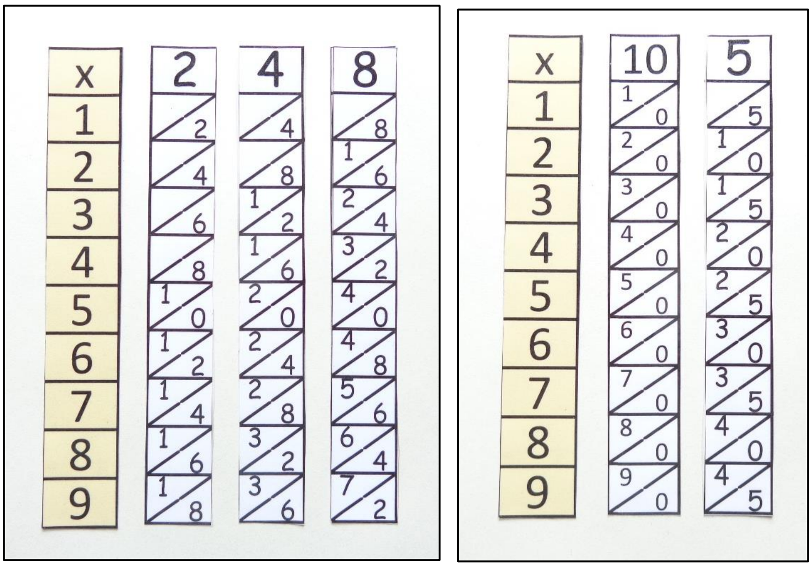


Figura 41. Comparación de tabla del 4 como doble de tabla del 2, tabla del 8 como doble de tabla del 4 y tabla del 5 como mitad de tabla del 10

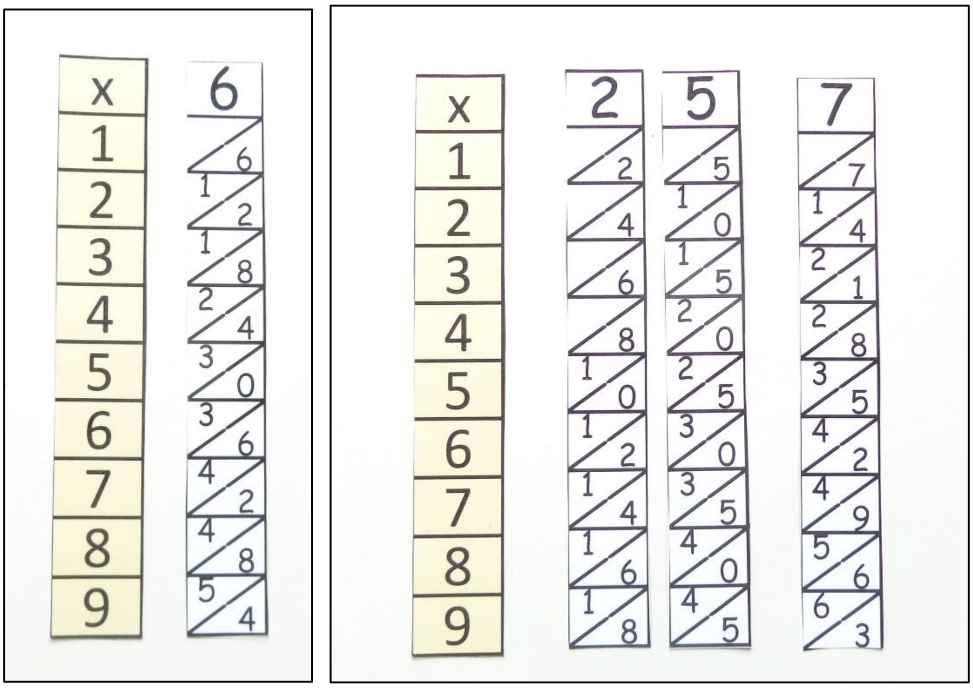


Figura 42. Tabla del 6 dispuesta para su memorización, y visualización de la propiedad distributiva de la multiplicación: tabla del 7 = tabla del 2 + tabla del 5

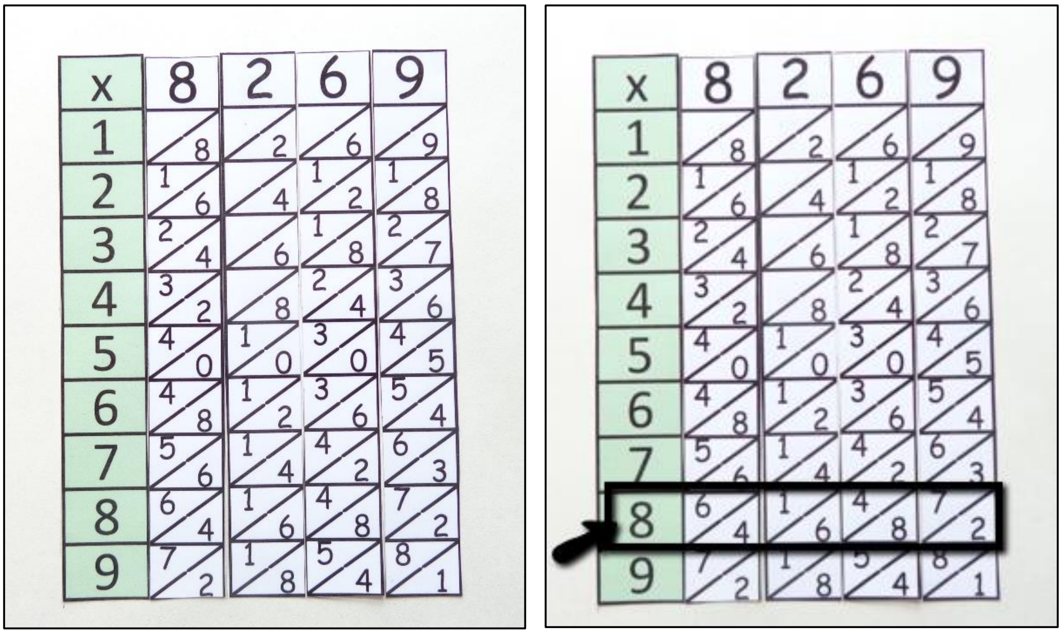


Figura 43. Ejemplo de multiplicación resuelta a través de la utilización de las varillas de Napier: 8269 x 8 = 6 // 4 + 1 (+1) // 6 + 4 (+1) // 8 + 7 // 2 = 6 6 1 5 2

(leído de derecha a izquierda)

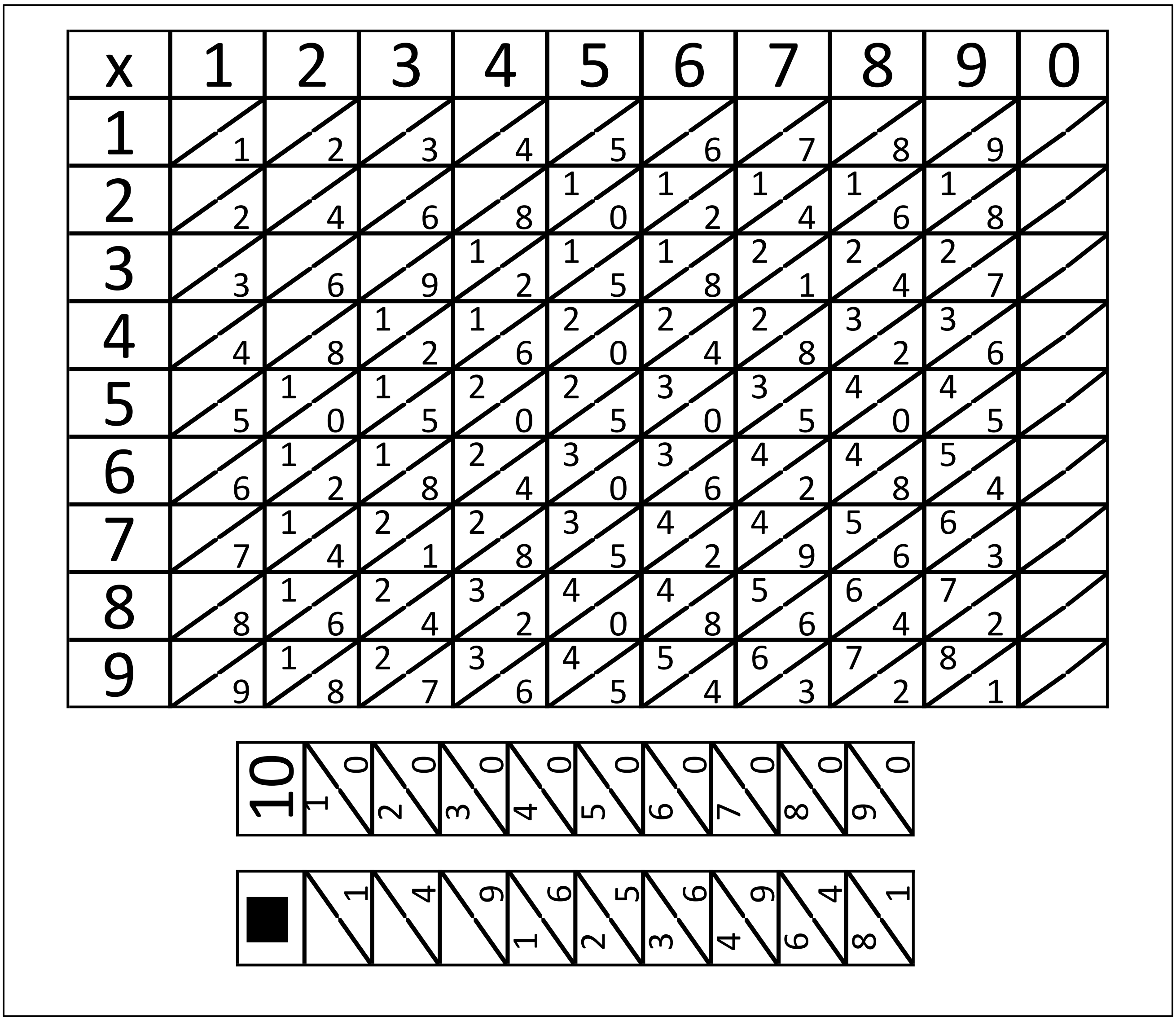


Figura 44. Plantillas para aula de varillas de Napier

Las varillas correspondientes a la tabla del 10 y a la serie de los cuadrados que se facilitan en la figura anterior no corresponden al modelo de John Napier: se han elaborado, en el caso de la del 10, para compararla con la tabla del 5 y dotar de una nueva estrategia para la memorización de dicha tabla y, en el caso de la de los cuadrados, para ayudar a memorizar también estos hechos numéricos.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

A tenor de lo analizado, podemos concluir que el currículo de Matemáticas desarrollado en Navarra a partir de la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa, en lo referente al aprendizaje de la multiplicación, no se adecúa a la secuenciación propuesta por los didactas, pues únicamente se refiere a la multiplicación como suma de sumandos iguales, que se corresponde con el modelo de unión disjunta de conjuntos: no se menciona de manera expresa en el currículo la multiplicación como modelo de medida o como modelo de matriz rectangular. Además, la memorización de las tablas de multiplicar se debe producir, de acuerdo con la secuenciación propuesta en el currículo vigente, antes de trabajar las propiedades multiplicativas; sin embargo, según los expertos, el conocimiento y aplicación de las propiedades multiplicativas resulta imprescindible para crear estrategias de cálculo mental que conduzcan a este objetivo.

En cuanto al aprendizaje del algoritmo estándar, se refleja en el currículo que su utilización y automatización ya se debe producir en segundo curso de Educación Primaria, y esta celeridad en su adquisición no resulta compatible, en nuestra opinión, con la aproximación al algoritmo desde métodos que favorezcan su comprensión.

De igual modo, se puede afirmar que los libros de texto analizados, refiriéndonos a la propuesta de una de las más importantes editoriales del país, no se ajustan al currículo vigente en cuanto a los contenidos trabajados en cada uno de los cursos, pues introducen todas las tablas de multiplicar en segundo curso de Educación Primaria, y menos todavía reflejan un enfoque coherente con el de los autores analizados, ya que exponen las definiciones de las operaciones y sus propiedades sin permitir a los estudiantes llegar a ellas de manera autónoma. Además, se trabaja la multiplicación únicamente como suma reiterada, ofreciendo los agrupamientos de objetos ya realizados en las imágenes y ejercicios que proponen. Los algoritmos se presentan en los libros de texto bajo una perspectiva puramente mecánica, sin partir del razonamiento lógico que permita su adquisición desde la comprensión del procedimiento empleado.

Para finalizar, se plantean una serie de cuestiones que pueden ser objeto de futuras investigaciones:

Dada la abundancia de contenidos a trabajar en Educación Primaria, ¿es posible el desarrollo de propuestas como la presentada?

¿Deberían ser los currículos españoles más detallados y clarificar con mayor exactitud qué aprendizaje se espera esté adquirido al finalizar cada nivel?

¿Resulta sencillo para los docentes de Matemáticas elaborar sus programaciones en base a los currículos vigentes, o consideran que hay cierta indefinición en cuanto a los contenidos que deben trabajarse en cada curso de Educación Primaria? ¿Cómo se sienten ante los cambios legislativos?

¿Siguen la mayoría de docentes, viendo lo extendido de su uso, la secuenciación y temporalización que proponen los libros de texto o, por el contrario, son críticos hacia este material y no lo utilizan como recurso principal en las aulas?

¿Mejoraría la competencia matemática de los alumnos españoles con la elaboración de nuevos currículos y con la aplicación de estrategias y recursos como los utilizados en otros países con excelentes resultados en las pruebas internacionales, o son principalmente otros factores los que conducen a estos resultados?

REFERENCIAS

Libros

Almodóvar, J.A. y García, P. (2011) *Matemáticas 2 Primaria. Proyecto Los Caminos del Saber*. Sevilla: Santillana.

Almodóvar, J.A., García, P y Pérez, C. (2012) *Matemáticas 3 Primaria. Proyecto Los Caminos del Saber.* Madrid: Santillana.

Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En Goñi, J. M. (coord.), *El currículum de Matemáticas en los inicios del siglo XXI* (13-21). Graó: Barcelona.

Belmonte, J.M. (2001). El tratamiento del cálculo en la escuela. En Chamorro, M.C. (dir.), Fernández, E. (coord.), *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas* (147-188). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Biniés, P. (2008). *Conversaciones matemáticas con Maria Antònia Canals. O cómo hacer de las Matemáticas un aprendizaje apasionante.* Graó: Barcelona.

Burgués, C. (2000). El currículo de primaria. En Goñi, J. M. (coord.), *El currículum de Matemáticas en los inicios del siglo XXI* (59-66). Graó: Barcelona.

Castro, E. (2008). Multiplicación y división. En Castro, E. (ed.), *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria* (203-230). Síntesis: Madrid.

Dienes, Z.P. (1986). *Las seis etapas del aprendizaje en matemática*. Barcelona: Teide.

Goñi, J. M. (2000). La enseñanza de las Matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos. En Goñi, J. M. (coord.), *El currículum de Matemáticas en los inicios del siglo XXI* (23-57). Graó: Barcelona.

Hong, K.T., Mei, Y.S y Lim, J. (ed.) (2009). *The Singapore Model Method for Learning Mathematics*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid: Síntesis.

Orton, A (2003). *Didáctica de las Matemáticas* (4ª ed.). Madrid: Morata.

Parker, T.H. y Baldridge, S.J. (2003). *Elementary Mathematics for Teachers*. Bloomington, Indiana: Sefton-Ash Publishing.

Prados, M.M., Reina, M.C. y del Rey, R. (2014). Principales modelos teóricos ante los procesos de enseñanza y aprendizaje. En Labrador, F.J. (dir.), *Manual de psicología de la educación. Para docentes de Educación Infantil y Primaria* (19-40). Madrid: Pirámide.

Yeap, B.H. y Edge, D. (2011). *Teaching of Whole Numbers. From Research to Practice. Based on the Singapore Math Approach*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Artículos

Boaler, J. (2012). Time Tests and the Development of Math Anxiety. *Education Week.* [Disponible en (30/05/2015): http://www.edweek.org/]

Boaler, J. y Williams, C. (2014). *Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts.* [Disponible en (30/05/2015): https://www.youcubed.org/]

Fernández, J. A. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en Matemáticas. *SUMA, Revista Iberoamericana de educación matemática*, 4, 31-46. [Disponible en (30/05/2015): http://revistasuma.es/]

Jannamorelli, B. (2008). El Prontuarium de Napier. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 13(49), 87-93.

Legislación

España. Gobierno. (2006). *Ley Orgánica de Educación* (Ley 2/2006). Madrid: BOE.

España. Gobierno. (2013). *Ley Orgánica para la mejora de la calidad educativa* (Ley 8/2013). Madrid: BOE.

Navarra. Gobierno (2007). *Decreto Foral por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra* (Decreto Foral 24/2007). Pamplona: BON.

Navarra. Gobierno (2014). *Decreto Foral por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra* (Decreto Foral 60/2014). Pamplona: BON.

Singapore. Ministry of Education (2007). *2007 Mathematics (Primary) Syllabus.*

[Disponible en (30/05/2015): http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/]

Singapore. Ministry of Education (2013). *2013 Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus.*

[Disponible en (30/05/2015): http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/]

ANEXOS

Anexo I

Cuestionario aplicado a los docentes que imparten la asignatura de Matemáticas

GRUPO/AULA: ___________________

Número de alumnos/as en el grupo:

Número de alumnos/as que presentan ALGUNAS DIFICULTADES o DIFICULTADES IMPORTANTES en la asignatura de Matemáticas como consecuencia directa de errores en el aprendizaje memorístico de las tablas de multiplicar:

Número de alumnos/as que presentan DIFICULTADES IMPORTANTES en la asignatura de Matemáticas como consecuencia directa de errores en el aprendizaje memorístico de las tablas de multiplicar:

Anexo II

Ejemplos de representaciones gráficas de las tablas de multiplicar

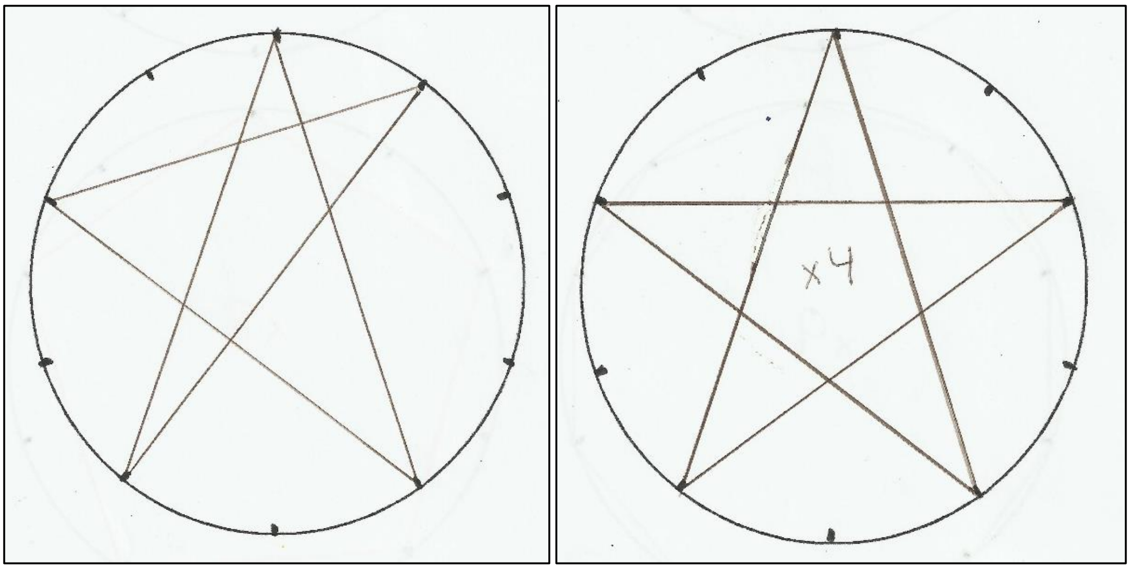


Figura 45. Tabla del 4 incorrectamente construida y tabla del 4 correctamente elaborada en plantilla de papel, basadas en tablero Waldorf

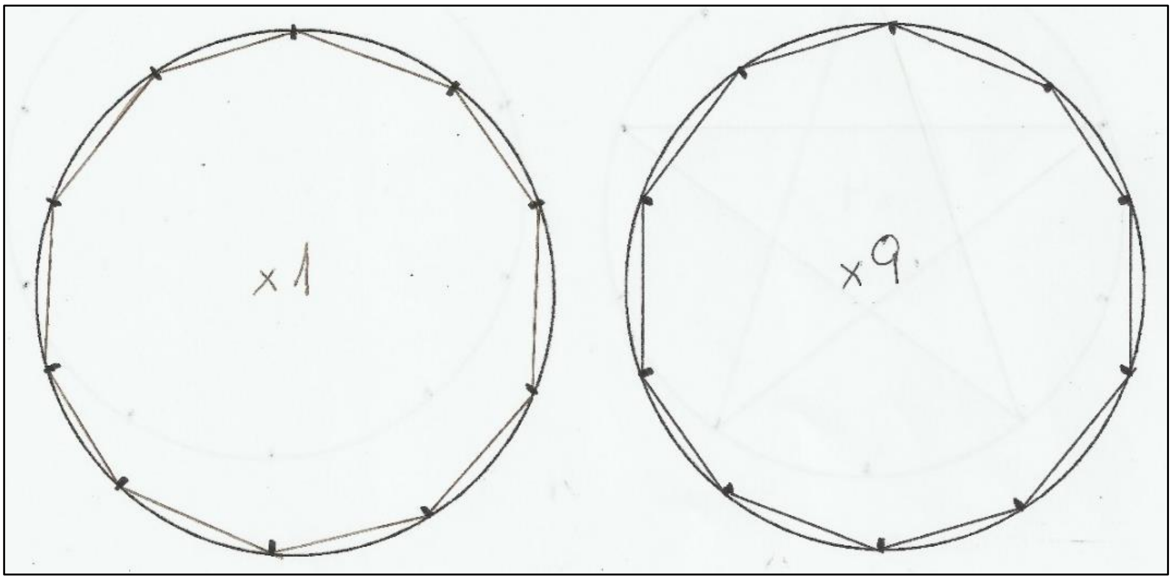


Figura 46. Tablas del 1 y del 9 elaboradas en plantilla de papel (tablero Waldorf)

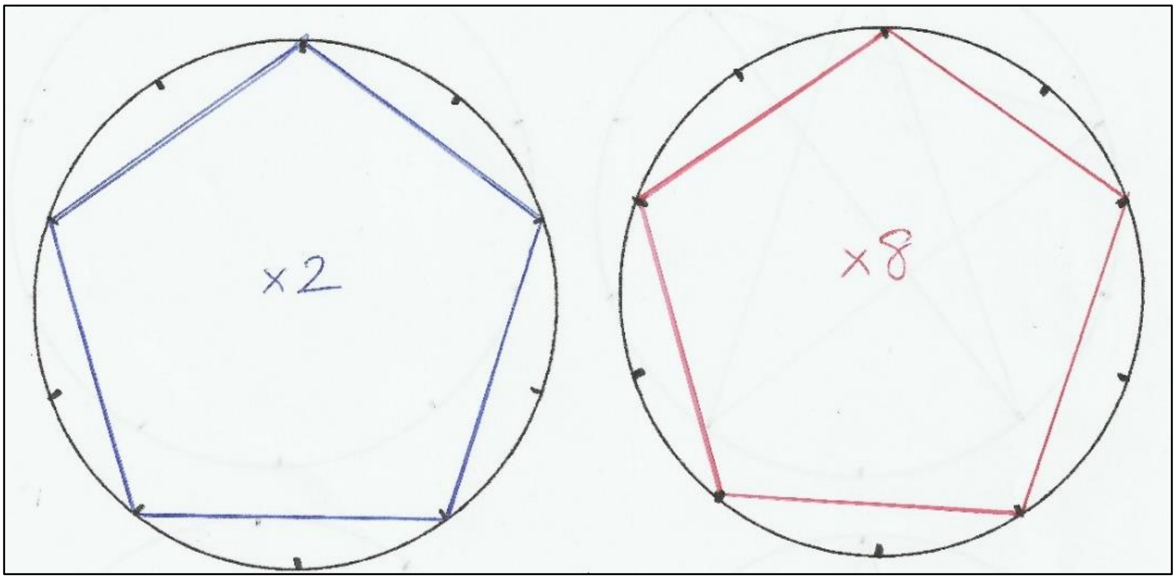


Figura 47. Tablas del 2 y del 8 elaboradas en plantilla de papel (tablero Waldorf)

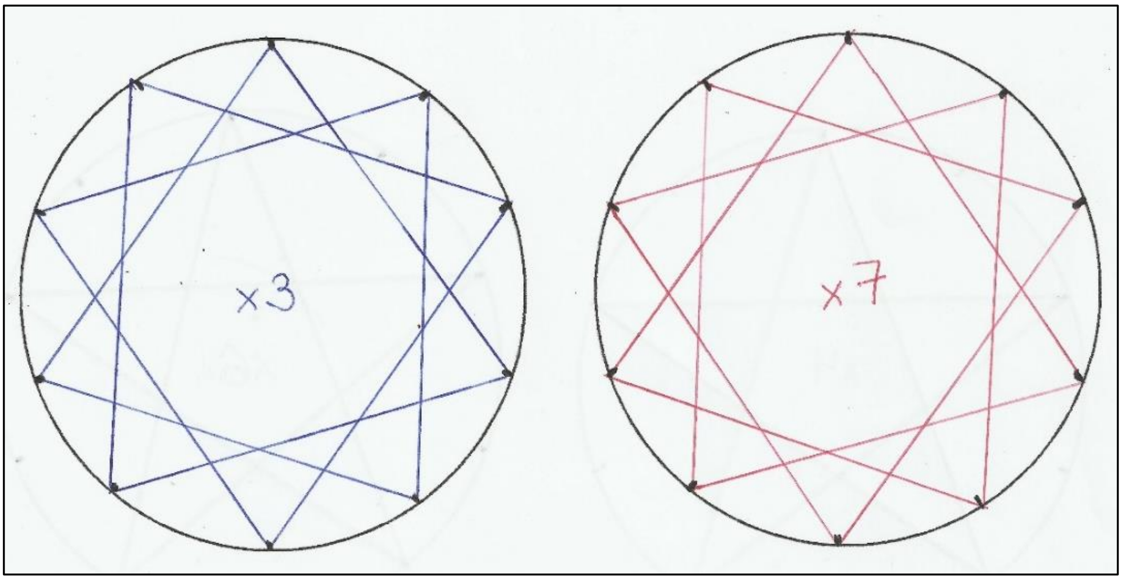


Figura 48. Tablas del 3 y del 7 elaboradas en plantilla de papel (tablero Waldorf)

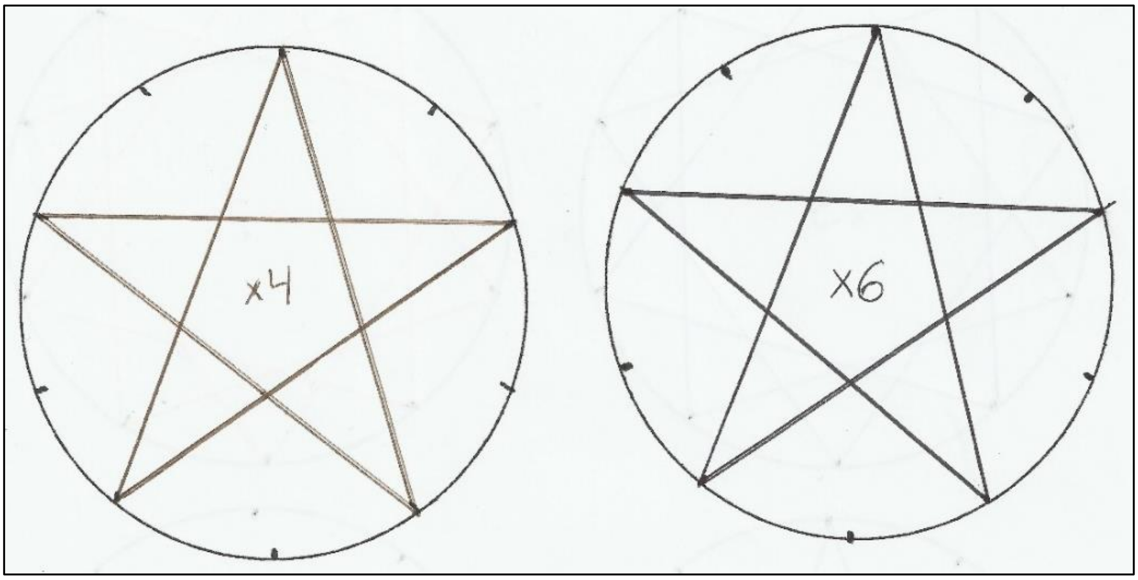


Figura 49. Tablas del 4 y del 6 elaboradas en plantilla de papel (tablero Waldorf)